

Лекция 11.
Исследование функции методами дифференциального
исчисления. Раскрытие неопределенностей, правило
Лопиталя-
Бернулли. Формула Тейлора, разложение функции в ряд
Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Разложение
в ряд Тейлора основных элементарных функций.

Говорят, что функция $f(x)$, определенная на некотором промежутке I , принимает в точке x_0 этого промежутка наибольшее значение, если для любой точки $x \in I$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Если же для всех $x \in I$ выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ принимает наименьшее значение.

Рассмотрим основные теоремы дифференциального исчисления.

Теорема (Ферма). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке I и в некоторой внутренней точке x_0 этого промежутка принимает наибольшее (или наименьшее) значение на этом промежутке. Тогда, если существует производная $f'(x_0)$, то эта производная равна нулю.

Доказательство. Для определённости будем считать, что в точке x_0 функция $f(x)$ принимает наибольшее значение. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0,$$

т.к. здесь числитель неположителен, а знаменатель положителен. Далее,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0,$$

т.к. числитель по-прежнему неположителен, а знаменатель отрицателен. Таким образом, $f'(x_0) \leq 0$ и $f'(x_0) \geq 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$. Случай, когда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимальное значение рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Заметим, что если точка x_0 не является внутренней точкой промежутка I , то утверждение теоремы может оказаться несправедливым. Пусть, например, функция $y = x$ рассматривается на отрезке $[0, 1]$. Производная этой функции тождественно равна единице и не обращается в нуль в точках 0 и 1, в которых данная функция достигает соответственно наименьшего и наибольшего значений.

Теорема (Ролля). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , и пусть $f(a) = f(b)$. Тогда на интервале (a, b) найдётся точка c такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего значения M в точке c_1 и наименьшего значения m в точке c_2 . Если $m = M$, то, поскольку, $m \leq f(x) \leq M$, функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$ и её производная равна нулю во всех точках интервала (a, b) ; в качестве точки c , в которой $f'(c) = 0$, можно взять любую точку этого интервала. Если же $m < M$, то в силу условия $f(a) = f(b)$ хотя бы одна из точек c_1 или c_2 является внутренней точкой отрезка $[a, b]$, и тогда по теореме Ферма в этой внутренней точке производная функции $f(x)$ равна нулю. Теорема доказана.

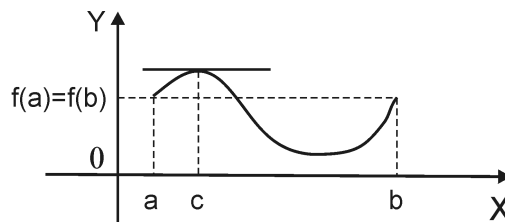
Заметим, что нарушение любого из условий теоремы может привести к тому, что её заключение не будет выполняться.

Если, например

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{если } x = 1, \end{cases}$$

то точки c , в которой $f'(c) = 0$ не существует. Здесь функция не является непрерывной на отрезке $[0, 1]$. Если $f(x) = x$ на том же отрезке, то нарушено условие $f(a) = f(b)$; производная $f'(x)$ тождественно равна единице и не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(0, 1)$. Рассмотрим ещё функцию $f(x) = x^{2/3}$ на отрезке $[-1, 1]$. Функция $f(x)$ непрерывна, $f(-1) = f(1)$, но производная $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ нигде в нуль не обращается. В данном случае дело в том, что $f'(x)$ не существует при $x = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что при выполнении её условий на интервале (a, b) найдется хотя бы одна точка c такая, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c, f(c))$ горизонтальна.



Заметим ещё, что если точка $c \in (a, b)$, то её можно записать в виде $c = a + \theta(b - a)$, где θ — некоторое число из интервала $(0, 1)$. В самом деле, $\theta = \frac{c - a}{b - a}$, числитель и знаменатель этой дроби оба положительны, причём числитель меньше знаменателя. Поэтому $\theta \in (0, 1)$.

Теорема (Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) . Тогда на этом интервале существует точка c такая, что $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , поскольку этими свойствами обладает $f(x)$. Далее $F(a) = f(a)$ и $F(b) = f(a)$ — это проверяется непосредственно. Мы видим, что для $F(x)$ выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка $c \in (a, b)$, для которой

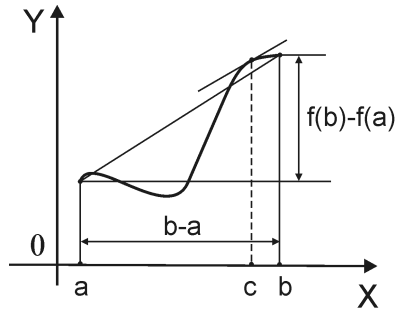
$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Отсюда вытекает требуемое равенство. Теорема доказана.

Следствие. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b) , причём во всех точках этого интервала $f'(x) = 0$. Тогда эта функция постоянна на отрезке $[a, b]$.

В самом деле, пусть $a < x \leq b$. Применим теорему Лагранжа к отрезку $[a, x]$. Имеем: $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$, т.к. $f'(c) = 0$. Поэтому $f(x) = f(a)$ для всех $x \in [a, b]$, и $f(x) = \text{const}$.

Выясним геометрический смысл теоремы Лагранжа. Очевидно, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловым коэффициентом хорды, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции $y = f(x)$. Поскольку, как известно, $f'(c)$ есть угловым коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c, f(c))$, то мы видим, что при выполнении условий теоремы Лагранжа на интервале (a, b) найдётся точка c такая, что касательная к графику функции $f(x)$ в точке с абсциссой c параллельна хорде, соединяющей граничные точки этого графика.



Теорема (Коши). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b) , причём $g'(x)$ отлична от нуля в каждой точке этого интервала. Тогда на (a, b) найдётся точка c такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Сначала заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$. В самом деле, если бы выполнялось равенство $g(b) = g(a)$, то на интервале (a, b) по теореме Ролля нашлась бы точка ξ , в которой $g'(\xi) = 0$. По условию теоремы такой точки нет. Поэтому $g(b) - g(a) \neq 0$.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)).$$

Легко видеть, что для $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ выполнены все условия теоремы Ролля. Поэтому существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

Из этого равенства вытекает требуемое. Теорема доказана.

Теорема (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей). Пусть в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ точки x_0 определены и дифференцируемы функции $f(x)$ и $g(x)$, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0,$$

и $g'(x) \neq 0$ для любого $x \in \dot{U}(x_0)$. Тогда если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K, \quad (1)$$

то и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K, \quad (2)$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 , положив $f(x_0) = g(x_0) = 0$. В результате получим функции, непрерывные в окрестности $U(x_0) = \overset{\circ}{U}(x_0) \cup \{x_0\}$ точки x_0 . Для этих новых функций оставим прежние обозначения. Заметим, что если $x \neq x_0$, то $g(x) \neq 0$. Если бы было $g(x) = 0$, то, как и при доказательстве теоремы Коши, к отрезку с концами в точках x_0 и x можно было бы применить теорему Ролля, и тогда нашлась бы точка ξ , в которой $g'(\xi) = 0$. По условию теоремы это невозможно. Поэтому для любого $x \neq x_0$ имеем $g(x) \neq 0$. Пусть $x \neq x_0$, и пусть для определенности $x > x_0$. Для пары функции $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[x_0, x]$ выполнены все условия теоремы Коши. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = K,$$

т.к., очевидно, $c \rightarrow x_0$, если $x \rightarrow x_0$. Здесь $c \in (x_0, x)$ — точка, существование которой обеспечивается теоремой Коши. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, и теорема доказана.

Мы рассмотрели теорему о раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Аналогичное утверждение справедливо и для случая неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для всех остальных предельных переходов ($x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow x_0 +$ и т.п.) правило Лопиталя остается в силе. Заметим, что если предел отношения производных (1) не существует, то отсюда еще не следует, вообще говоря, что не существует предел (2).

Пример. Выясним вопрос о производных функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ при $x = \pm 1$. Имеем

$$\begin{aligned} (\arcsin x)' \big|_{x=1} &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\arcsin(1+h) - \arcsin 1}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{(\arcsin(1+h) - \arcsin 1)'}{h'} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{1}{\sqrt{1 - (1+h)^2}} = +\infty. \end{aligned}$$

Таким образом, (левая) производная функции $y = \arcsin x$ в точке $x = 1$ равна $+\infty$. Аналогично проверяется что $(\arcsin x)' \big|_{x=-1} = +\infty$, и $(\arccos x)' \big|_{x=\pm 1} = -\infty$.

С помощью правила Лопиталя вычислим несколько важных пределов. Пусть $a > 1$, $\alpha > 0$, и пусть требуется вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha}$. Мы имеем здесь дело с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$. Преобразуем сначала выражение под знаком предела:

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \left(\frac{(a^{1/\alpha})^x}{x} \right)^\alpha = \left(\frac{b^x}{x} \right)^\alpha$$

Где $b = a^{1/\alpha} > 1$. Найдем $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^x}{x}$. Для раскрытия этой неопределенности (вида $\frac{\infty}{\infty}$) применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(b^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} b^x \ln b = +\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{b^x}{x} \right)^\alpha = +\infty.$$

Мы видим, что показательная функция (с основанием большим единицы) растёт быстрее степенной (с любым показателем степени). Пусть $a > 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Рассмотрим предел

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x}$. И здесь целесообразно предварительно преобразовать выражение под знаком предела:

$$\frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x} = \left(\frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x} \right)^\beta.$$

Вычислим сначала предел выражения в скобках. Для этого надо раскрыть неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^{\alpha/\beta})'}{(\log_a x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\alpha}{\beta} \cdot x^{(\alpha/\beta)-1}}{\frac{1}{x \ln a}} = \frac{\alpha \ln a}{\beta} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha/\beta} = +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a^\beta x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{\alpha/\beta}}{\log_a x} \right)^\beta = +\infty.$$

Мы видим, что степенная функция (с положительным показателем степени) растет быстрее любой степени логарифма при $x \rightarrow +\infty$.

Рассмотрим еще при $0 < a < 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ предел $\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \log_a^\beta x$. Здесь мы имеем неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Пусть $x = \frac{1}{t}$. Тогда $t \rightarrow +\infty$, и мы получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \log_a^\beta x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(-\log_a t)^\beta}{t^\alpha} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\log_{a^{-1}}^\beta t}{t^\alpha} = 0$$

в силу предыдущего результата. Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0+} x^\alpha \log_a^\beta x = 0$.

* Докажем ещё, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, где $a > 0$. Если $0 < a \leq 1$, то утверждение очевидно. Пусть $a > 1$, и пусть

$$[n/2] > 4a^2, \quad (3)$$

где $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$. Тогда

$$n! > [n/2]([n/2] + 1)([n/2] + 2) \dots ([n/2] + [n/2]) > (4a^2)^{[n/2]+1} > (4a^2)^{n/2} = 2^n a^n,$$

т.е. при указанных n выполняется неравенство $n! > 2^n a^n$. Поэтому при выполнении (3) имеем:

$$0 < \frac{a^n}{n!} < \frac{a^n}{2^n a^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Т.к. $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то отсюда получаем требуемое. *

Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.) Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные всех порядков до n -го включительно. Тогда справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

Задание Найдите производную:

5.41. $y = x \sqrt[3]{x^2(2 \ln x - 3^x)}$. 5.42. $y = 3x^3 \log_2 x + \frac{x^a}{e^x}$.

5.43. $y = 2 \sin x - 3 \operatorname{tg} x$. 5.44. $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

5.45. $y = x^{3/2} \sqrt[3]{x^5 + a}$. 5.46. $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

5.47. $y = \sin \frac{3x}{2}$. 5.48. $y = 6 \cos \frac{2x}{3}$.

5.49. $y = (1 + 4x^2)^3$. 5.50. $y = \sqrt[4]{(1 + 3x^2)^3}$.

5.51. $y = \sin^2 \frac{x}{2}$. 5.52. $y = \sqrt{1 + \sin 4x} - \sqrt{1 - \sin 4x}$.

5.53. $y = x \arcsin \ln x$. 5.54. $y = \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right)$.

5.55. $y = \sqrt[4]{(1 + \sin^2 x)^3}$. 5.56. $y = x^2 e^{-2x}$.

5.57. $y = e^{x/3} \cos^2 \frac{x}{3}$.

5.58. $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a})$.