

Лекция 3.

Функция и ее график. Понятия композиции функций и обратных функций. Четные, нечетные, периодические функции и их свойства.

Пусть X и Y — произвольные множества. Говорят, что задана функция f , определенная на множестве X со значениями в Y , если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие элемент $f(x)$ множества Y :

$$f: X \rightarrow Y. (1)$$

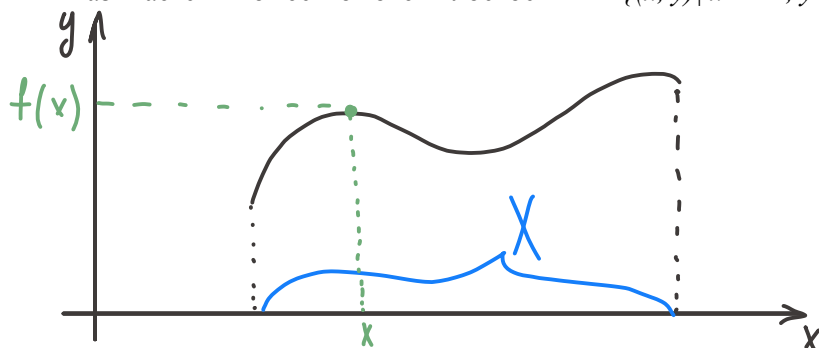
Множество X в (1) называется областью определения функции f . Областью значений этой функции называется подмножество множества Y , состоящее из тех (и только тех) его элементов y , для которых $y = f(x)$ при некотором $x \in X$; область значений обычно обозначают $f(X)$. Символ x , которым обозначается общий элемент множества X , называется аргументом функции или независимой переменной. Элемент $f(x_0) \in Y$, поставленный в соответствие элементу $x_0 \in X$, называется значением функции f в точке x_0 . Часто вместо (1) пишут $y = f(x)$.

Заметим, что в соответствии со сказанным у последней записи есть и другой смысл: y есть значение функции f в точке x . Как правило, в конкретных случаях бывает ясно, о чем идет речь, и к недоразумениям такая двусмысленность не приводит. При изменении аргумента значения функции $y = f(x)$, вообще говоря, меняются. По этой причине y называют зависимой переменной. Следует иметь в виду, что слово функция имеет много синонимов: отображение, преобразование, соответствие, оператор, функционал и др. В общей теории функций чаще используется термин отображение. В общем определении функции (1) множества X и Y будут подмножествами числовой прямой. Такие функции мы будем для краткости называть числовыми.

Рассмотрим плоскость, на которой введена декартова прямоугольная система координат. Каждой точке плоскости можно известным способом поставить в соответствие упорядоченную пару действительных чисел (x, y) — ее координаты. В результате получим взаимно однозначное соответствие между множеством точек плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Пусть $X \subset \mathbf{R}$. Графиком функции

$$f: X \rightarrow \mathbf{R}$$

называется множество точек плоскости $\Gamma = \{(x, y) \mid x \in X, y = f(x)\}$.



Пусть даны два отображения

$$f: X \rightarrow Y \text{ и } g: Y \rightarrow Z.$$

С их помощью можно построить новое отображение

$$g \circ f: X \rightarrow Z,$$

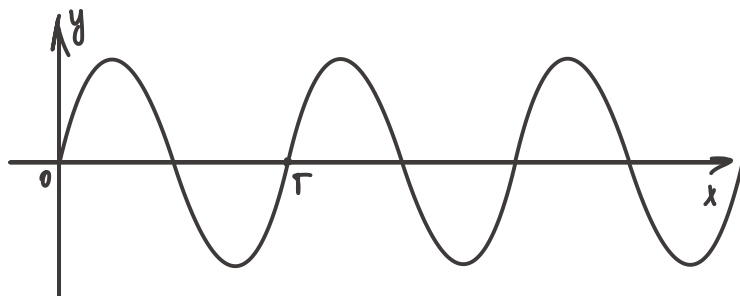
которое элементу $x \in X$ ставит в соответствие элемент $g(f(x)) \in Z$. Такая операция над функциями называется композицией. Функцию $z = g(f(x))$ называют при этом сложной функцией.

Рассмотрим теперь функцию f , определённую на симметричном относительно начала координат множестве X . Симметричность в данном случае означает, что если $x \in X$, то и $-x \in X$. Функция f называется чётной, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x) = f(-x)$. Если в этом определении $f(x) = -f(-x)$, то функция f называется нечётной.

Свойства четных и нечетных функций:

- 1) $\begin{cases} f(x) - \text{четная} \\ g(x) - \text{нечетная} \\ D_f = X_1, D_f \cap D_g \neq \emptyset \\ D_g = X_2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) - \text{нечетная} \\ \frac{f(x)}{g(x)} - \text{нечетная (при } g(x) \neq 0) \\ \text{на } D_f \cap D_g \end{cases}$
 - 2) $\begin{cases} f(x), g(x) - \text{нечетные} \\ \text{такие } \in D_f \text{ и } D_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} af(x) \pm bg(x) - \text{н.ч. } \forall a, b \in \mathbb{R} \\ f(x) \cdot g(x) - \text{чет} \\ \frac{f(x)}{g(x)} - \text{чет при } g(x) \neq 0 \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ на } D_f \cap D_g$
 - 3) $\begin{cases} f(x), g(x) - \text{чет} \\ \text{такие } \in D_f \text{ и } D_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} af(x) \pm bg(x) - \text{чет } \forall a, b \in \mathbb{R} \\ f(x) \cdot g(x) - \text{чет} \\ \frac{f(x)}{g(x)} - \text{чет при } g(x) \neq 0 \end{cases} \left| \text{ на } D_f \cap D_g \right.$
 - 4) график четной ф-ии симметричен относ. оси ординат, график нечетной ф-ии симметр. относ. начала координат.
- ⊕ теоремы далее

Пусть T — некоторое ненулевое действительное число (обычно его считают положительным), и пусть $X \subset \mathbb{R}$ таково, что из $x \in X$ следует включение $x + kT \in X$ для любого $k \in \mathbb{Z}$. Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется T -периодической, если $f(x + T) = f(x)$ для любого $x \in X$.



/Далее теорема/

$$y = f(x), \quad f(x) = \sin x \\ \Downarrow \\ y = \sin x$$

Обратимся снова к общей теории функций. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — биективное отображение. Поскольку в этом случае f сюръективно, то для любого $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, для которого $f(x) = y$, а поскольку f инъективно, то такой элемент ровно один. Таким образом определено отображение $f^{-1}: Y \rightarrow X$, которое произвольному элементу $y \in Y$ ставит в

соответствие тот единственный элемент x множества X , для которого $y = f(x)$. Отображение f^{-1} называется обратным по отношению к f . Нетрудно проверить, что $f^{-1}: Y \rightarrow X$ также является биективным отображением, обратным для которого служит отображение f .

Свойства обратных функций:

1) $f^{-1}(f(x)) = x$ (при условии, что $x \in X$ и $x \in f(X)$)

2) Графики симметричны относительно прямой $y = x$.

$\exists f(x_0) = y_0$; тогда т. (x_0, y_0)
 $\downarrow$
 $f^{-1}(y_0) = x_0$; тогда т. (y_0, x_0) } симметричны

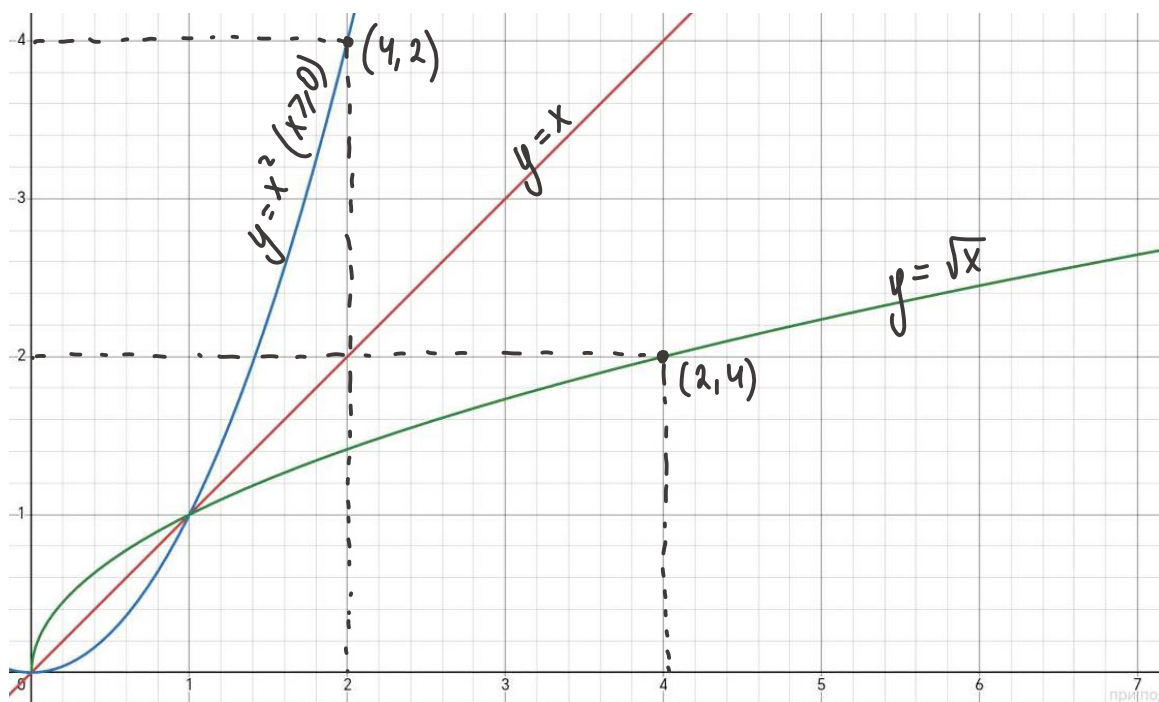
3) Имеет одинаковую монотонность:

$f(x) \uparrow$ на $X \Rightarrow f^{-1}(x) \uparrow$ на $f(X)$

$f(x) \downarrow$ на $X \Rightarrow f^{-1}(x) \downarrow$ на $f(X)$

До-во:
 $\left. \begin{array}{l} x_1, x_2 \in X \\ x_1 > x_2 \\ f(x) \uparrow \text{ на } X \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{f(x_1)}_{y_1} > \underbrace{f(x_2)}_{y_2}$
 $\left. \begin{array}{l} f^{-1}(y_1) = x_1 \\ f^{-1}(y_2) = x_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 > x_2 \\ y_1 > y_2 \end{array} \Rightarrow f^{-1}(x) \uparrow, \text{ т.е. } g.$

Пример:



⊕ Теорема галле ☺

Теорема. Чётная ф-я не может быть строго монотонной на всей области определения.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = f(-x) \\ X - \text{симм. отн. "0"} \end{array} \right\} \underline{f(x) \narrow}.$$

Док-во:

Рассмотрим $\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_1 \in X \end{cases}$. Тогда: $\exists x_2: \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_2 \in X \end{cases}$.

$\begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow x_2 < 0 < x_1 \Rightarrow x_2 < x_1$; тогда, если $f(x)$ строго возрастает: $f(x_2) < f(x_1)$. Но $f(-x_1) = f(x_1)$, т.е. $f(x_2) = f(x_1)$.

$\begin{cases} f(x_2) = f(x_1) \\ f(x_2) < f(x_1) \end{cases} \Rightarrow \emptyset$, такое невозможно. Значит, $f(x)$ не строго возрастает, где строго убывает. Д-во аналогично. З.м.г.

Теорема. Периодичная ф-я не может быть строго монотонной на всей области опр-я.

$$\left. \begin{array}{l} \forall x \in X: x + kT \in X \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ f(x + kT) = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \int f(x) \narrow \\ \int f(x) \nearrow \end{array}.$$

/T > 0/

Д-во:

Предположим, что $f(x) \nearrow$. Тогда $\forall x_0 \in X, \forall k \in \mathbb{N}$:
 $x_0 + kT > x_0$.

Тогда $f(x_0 + kT) > f(x_0)$. Но $f(x)$ — периодичная,

$f(x_0 + kT) = f(x_0)$. Получаем: $\begin{cases} f(x_0) = f(x_0 + kT) \\ f(x_0 + kT) > f(x_0) \end{cases} \Rightarrow \emptyset$, такое невозможно.

Получим противоречие. Значит, предположение неверно. Для $f(x) \searrow$ д-во аналогично. З.м.г.

Примеры:

Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x + a + 3| = |x - a - 3| - (a + 3)^2$$

имеет единственное решение.

(Задача от подписчиков)

Показать решение



Перенесем все слагаемые в левую часть:

$$x^2 - |x + a + 3| - |x - a - 3| + (a + 3)^2 = 0$$

Рассмотрим функцию: $f(x) = x^2 - |x + a + 3| - |x - a - 3| + (a + 3)^2$. Данная функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$ и является четной, так как $f(x) = f(-x)$. Следовательно, для каждого $x_0 > 0$, удовлетворяющего уравнению, существует также корень $-x_0$, удовлетворяющий уравнению. Следовательно, для того, чтобы уравнение имело единственный корень, его корнем должен быть только $x = 0$.

Подставим $x = 0$:

$$-|a + 3| - |-a - 3| + (a + 3)^2 = 0 \Rightarrow (a + 3)^2 - 2|a + 3| = 0$$

Сделав замену $t = |a + 3|$, сведем уравнение к виду $t^2 - 2t = 0$; корнями будут $t = 0$ и $t = 2$. Следовательно,

$$\begin{cases} |a + 3| = 0 \\ |a + 3| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ a = -1 \\ a = -5 \end{cases}$$

Проверим, действительно ли при этих значениях a уравнение имеет только корень $x = 0$.

1) Подставим $a = -3$:



Убеждаемся, что уравнение действительно имеет ровно один корень.

3) Подставив $a = -5$, получаем то же уравнение, что и при $a = -1$.

Таким образом, окончательный ответ:

$$a \in \{-5; -1\}$$

Ответ:

$$\{-5; -1\}$$

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\left(x + \frac{1}{x-a}\right)^2 - (a+9)\left(x + \frac{1}{x-a}\right) + 2a(9-a) = 0$$

имеет ровно 4 решения.

[Спрятать решение](#)

Решение.

Заметим, что сумма корней уравнения $t^2 - (a+9)t + 2a(9-a) = 0$ равна $a+9$, а их произведение равно $2a(9-a)$. Поэтому корни — числа $2a$ и $9-a$. Тогда для исходного уравнения имеем:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x-a} = 2a, \\ x + \frac{1}{x-a} = 9-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a + \frac{1}{x-a} = a, \\ x-a + \frac{1}{x-a} = 9-2a. \end{cases}$$

Каждое из уравнений совокупности может иметь не более двух корней.

Для того чтобы исходное уравнение имело четыре корня, каждое из уравнений совокупности должно иметь по два корня и при этом уравнения не должны совпадать. Заметим, что если два взаимно обратных числа y и $\frac{1}{y}$ различны, то $\left|y + \frac{1}{y}\right| > 2$. Используя это свойство, получаем, что четыре корня исходное уравнение будет иметь при

$$\begin{cases} \begin{cases} a < -2, \\ a > 2, \\ 9-2a < -2, \\ 9-2a > 2, \\ a \neq 9-2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a < -2, \\ a > 2, \end{cases} \\ \begin{cases} a > \frac{11}{2}, \\ a < \frac{7}{2}, \\ a \neq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a < -2, \\ 2 < a < 3, \\ 3 < a < \frac{7}{2}, \end{cases} \\ a > \frac{11}{2}. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup \left(3; \frac{7}{2}\right) \cup \left(\frac{11}{2}; +\infty\right)$.

[Спрятать критерии](#)