

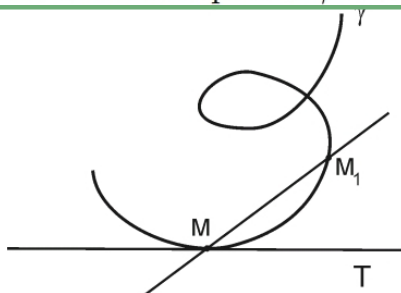
Лекция 8.

Дифференцируемость функции и производная. Геометрический смысл производной. Правила дифференцирования. Производные элементарных функций.

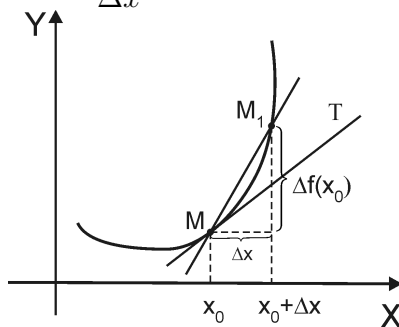
Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , и пусть $\Delta x \neq 0$ таково, что $x_0 + \Delta x$ принадлежит указанной окрестности. Если существует конечный предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Как известно, знаменатель дроби под знаком последнего предела называется приращением аргумента, а числитель — приращением функции. Поэтому говорят также, что производная есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю.

Пусть материальная точка движется вдоль оси абсцисс, и пусть $x(t)$ — её координата в момент времени t . Для вычисления мгновенной скорости движения материальной точки при $t = t_0$ составляют отношение $\frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}$ и находят его предел при $\Delta t \rightarrow 0$. Таким образом, мгновенная скорость изменения координаты (в данном случае абсциссы) материальной точки при $t = t_0$ равна $x'(t_0)$.

Пусть имеется (плоская) кривая γ , и на ней задана точка M . Выберем на этой кривой точку M_1 , отличную от M и проведем секущую MM_1 . Если при стремлении M_1 к M секущая MM_1 стремится занять определенное положение, то прямая T , находящаяся в этом положении, называется касательной к кривой γ в точке M .



Углом наклона к оси абсцисс прямой l , пересекающей эту ось в точке P , называется угол, на который следует повернуть вокруг точки P в направлении против часовой стрелки луч, исходящий из точки P в положительном направлении оси абсцисс, до его совпадения с прямой l . Если прямая l параллельна оси абсцисс (или совпадает с ней), то указанный угол по определению считается равным нулю. Пусть дан график функции $y = f(x)$, определённой в окрестности точки x_0 и пусть точка $M(x_0, f(x_0))$ лежит на этом графике. Возьмём на графике функции $y = f(x)$ точку $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Угловым коэффициентом (т.е. тангенс угла наклона к оси абсцисс) секущей, проходящей через точки M и M_1 , равен $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 , то угловым коэффициентом касательной, положение которой стремится при $\Delta x \rightarrow 0$ занять секущая, равен $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.



Отсюда — геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$. Зная угловый коэффициент, нетрудно составить уравнение касательной:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Нормалью к кривой γ в точке M , лежащей на этой кривой, называется прямая, проходящая через M перпендикулярно касательной к γ в этой точке. Составим уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$. Вектор нормали к касательной служит направляющим вектором прямой N . В качестве такого вектора можно взять вектор $\mathbf{n} = \{f'(x_0), -1\}$. Отсюда получаем (каноническое) уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{f'(x_0)} = \frac{y - f(x_0)}{-1}.$$

Обычно уравнение нормали записывают в виде:

$$x - x_0 + f'(x_0)(y - f(x_0)) = 0.$$

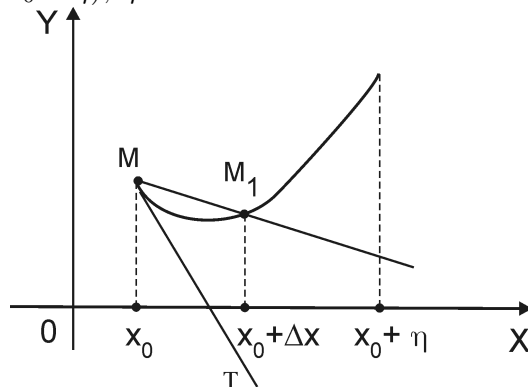
Если функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 , и если существуют пределы $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$, или $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет бесконечную производную, равную соответственно $+\infty$ или $-\infty$. Геометрически наличие бесконечной производной означает, что касательная к графику функции в соответствующей точке вертикальна.

Если функция $f(x)$ определена в правосторонней окрестности точки x_0 , т.е. на полуинтервале $[x_0, x_0 + \eta)$, $\eta > 0$, то в точке x_0 можно рассмотреть предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

который в случае его существования называется правой производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'_+(x_0)$. Аналогично можно рассмотреть левую производную $f'_-(x_0)$ для

функции, определенной на левосторонней окрестности $(x_0 - \eta, x_0]$, $\eta > 0$, точки x_0 . Левая и правая производные называются односторонними. Чтобы выяснить геометрический смысл, например, правой производной, рассмотрим график функции $y = f(x)$, определённой на полуинтервале $[x_0, x_0 + \eta)$, $\eta > 0$.



Рассмотрим точки $M(x_0, f(x_0))$ и $M_1(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, $0 < \Delta x < \eta$, лежащие на рассматриваемом графике. Если M_1 стремится к M , и при этом секущая MM_1 стремится занять определенное положение, то прямая T в этом положении называется (правой) касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M . Угловым коэффициентом такой касательной равен, как и выше, $f'_+(x_0)$. Аналогично можно рассмотреть левую касательную в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ к графику функции $y = f(x)$, заданной на полуинтервале $(x_0 - \eta, x_0]$, $\eta > 0$. Угловым коэффициентом левой касательной равен $f'_-(x_0)$. Уравнения односторонних касательных составляются так же, как и уравнение обычной (двусторонней) касательной.

Примеры. 1. Пусть $y = \sqrt[3]{x}$. Здесь $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x} = +\infty$. Касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x}$ в точке $(0, 0)$ вертикальна.

2. Пусть $y = |x|$. В этом случае $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = 1$, $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = -1$. Эта функция не имеет производной при $x = 0$. Правой касательной в точке $(0, 0)$ будет прямая $y = x$, левой — прямая $y = -x$.

3. Рассмотрим функцию $y = x^{2/3}$. В данном случае $f'_+(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{(\Delta x)^{2/3} - 0}{\Delta x} = +\infty$, $f'_-(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-} \frac{(\Delta x)^{2/3} - 0}{\Delta x} = -\infty$. Левая и правая касательные к графику функции $y = x^{2/3} = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $(0, 0)$ обе вертикальны и совпадают. Здесь вертикальная прямая, т.е. ось ординат, является обычной (двусторонней) касательной.

Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 . Эта функция называется дифференцируемой в точке x_0 , если её приращение может быть представлено в виде

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0,$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx .

Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции). Функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0 тогда и только тогда, когда существует производная $f'(x_0)$ в этой точке.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Требуется доказать существование $f'(x_0)$. По определению дифференцируемости $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$. После деления на Δx получаем: $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + o(1) \rightarrow A$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Таким образом, производная $f'(x_0)$ существует (и равна A). Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть существует $f'(x_0)$. Тогда $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)$, $\Delta x \rightarrow 0$. После умножения на Δx получаем: $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(1) \cdot \Delta x$, $\Delta x \rightarrow 0$. Очевидно, $o(1) \cdot \Delta x = o(\Delta x)$, поэтому функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Достаточность доказана. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы видно, что число A в определении дифференцируемости равно $f'(x_0)$. В связи с этой теоремой функцию, имеющую (конечную) производную в некоторой точке, называют дифференцируемой в этой точке. Сам процесс вычисления производной называют дифференцированием функции.

Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции.) Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 . Тогда $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$, $\Delta x \rightarrow 0$. Отсюда $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)) = 0$, т.е. $\Delta f(x_0) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$. Теорема доказана.

Достаточным условием дифференцируемости непрерывность не является. Мы видели, что функция $f(x) = |x|$ не имеет производной при $x = 0$. Однако, $f(x)$ непрерывна в этой точке (как и во всякой другой). Это следует, например, из равенства $|x| = \sqrt{x^2}$ и теоремы о непрерывности сложной функции. Можно доказать и непосредственно: если $\varepsilon > 0$, то, взяв $\delta = \varepsilon$, получим, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняются соотношения $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$, т.е. $||x| - |x_0|| < \varepsilon$.

Рассмотрим теоремы о правилах дифференцирования функций.

Теорема (о производной суммы, произведения и частного.) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0 . Тогда в этой точке дифференцируемы также функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (последняя — при условии $g(x) \neq 0$), причём

$$\begin{aligned}(f(x) \pm g(x))' &= f'(x) \pm g'(x) \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.\end{aligned}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}(f(x) \pm g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} ((f(x + \Delta x) \pm g(x + \Delta x)) - (f(x) \pm g(x))) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \pm \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) = f'(x) \pm g'(x).\end{aligned}$$

Производная произведения может быть вычислена так:

$$\begin{aligned}(f(x) \cdot g(x))' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right) = \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функции $g(x)$, которая является следствием дифференцируемости: $g(x + \Delta x) \rightarrow g(x)$ при $\Delta x \rightarrow 0$.

В случае производной частного рассуждаем аналогично

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \cdot g(x) - f(x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть $f(x) = C$, где C — константа. Тогда

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0,$$

т.е. $C' = 0$. Поскольку постоянный множитель можно вынести за знак предела, то $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

Теорема (о производной сложной функции). Пусть функции $f(x)$ и $g(y)$ определены в окрестностях соответственно точек x_0 и y_0 и дифференцируемы в этих точках, $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 , и $(g(f(x)))' \Big|_{x=x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.

Доказательство. Функция $f(x)$ дифференцируема и, следовательно, непрерывна в точке x_0 . Пусть функция $g(y)$ определена для тех y , для которых $|y - y_0| < \varepsilon$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \varepsilon$, и для таких x имеет смысл сложная функция $g(f(x))$. Таким образом, сложная функция $g(f(x))$ определена в окрестности точки x_0 , и можно говорить о её производной в этой точке. Запишем определение дифференцируемости функции $g(y)$ в точке y_0 :

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + o(\Delta y), \quad \Delta y \rightarrow 0.$$

Пусть $\alpha(\Delta y) = \frac{o(\Delta y)}{\Delta y}$, если $\Delta y \neq 0$, и $\alpha(\Delta y) = 0$, если $\Delta y = 0$. Очевидно, $\alpha(\Delta y) \rightarrow 0$, если $\Delta y \rightarrow 0$. Определение дифференцируемости можно переписать так:

$$g(y_0 + \Delta y) - g(y_0) = g'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y) \cdot \Delta y, \quad \Delta y \rightarrow 0.$$

При достаточно малом Δx подставим сюда $y_0 = f(x_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Тогда

$$g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + \alpha(\Delta y)(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (g(f(x)))' \Big|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(f(x_0 + \Delta x)) - g(f(x_0))}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(g'(y_0) \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right) + \\ &\quad + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\alpha(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right). \quad (1) \end{aligned}$$

Заметим, что $\alpha(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \rightarrow 0$, т.к. $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$ — дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ непрерывна в этой точке. Кроме того, $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Поэтому последний предел в (1) равен нулю, и мы получаем требуемое равенство:

$$(g(f(x)))' \Big|_{x=x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Теорема доказана.

Правило дифференцирования сложной функции часто записывают в виде

$$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x),$$

где под $g'(f(x))$ понимается производная функции $g(y)$, вычисленная при $y = f(x)$.

Теорема (о производной обратной функции.) Пусть функция $f(x)$ осуществляет взаимно однозначное отображение окрестности $U(x_0)$ точки x_0 на окрестность $V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, причём обратная функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке y_0 . Тогда, если существует $f'(x_0) \neq 0$, то существует также и $(f^{-1})'(y_0)$, причём

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Пусть $y_0 + \Delta y \in V(y_0)$, и пусть $f^{-1}(y_0 + \Delta y) = x_0 + \Delta x$. Далее, $f^{-1}(y_0) = x_0$, и

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) &= x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x, \\ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= f(f^{-1}(y_0 + \Delta y)) - y_0 = y_0 + \Delta y - y_0 = \Delta y. \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\Delta y \neq 0$ то и $\Delta x \neq 0$ — это вытекает из того, что отображение $f: U(x_0) \rightarrow V(y_0)$ взаимно однозначно. Заметим ещё, что из непрерывности функции $f^{-1}(y)$ в точке y_0 и из (2) следует, что если $\Delta y \rightarrow 0$, то и $\Delta x \rightarrow 0$. Теперь можно вычислить производную обратной функции:

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(y_0) &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\Delta y}{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)} \right)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ взаимно однозначно отображает бесконечный интервал $(0, +\infty)$ на себя. Поэтому существует обратная функция $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$, которая непрерывна по теореме о непрерывности обратной функции. Вычислим производную функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x. \end{aligned}$$

Мы видим, что $f'(x) \neq 0$ на интервале $(0, +\infty)$. Поэтому обратная функция дифференцируема в каждой точке такого интервала. Для её производной имеем:

$$(f^{-1})'(y) = (\sqrt{y})' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{2x} \Big|_{x=\sqrt{y}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Таким образом, $(\sqrt{y})' = \frac{1}{2\sqrt{y}}$.