

Лекция 1.

Определение и аксиоматика булевой алгебры. Булевы операции.

Историческая справка

Математическая логика зародилась из формальной логики, основы которой заложил Аристотель. Он исследовал законы мышления и теорию доказательств.

В XVII веке Готфрид Лейбниц выдвинул идею о переводе логики в область математики, где можно не спорить, а вычислять истину, и работал с двоичной системой счисления.

Однако настоящий прорыв совершил в XIX веке Джордж Буль. Он создал булеву алгебру — систему обозначений и правил (операции И, ИЛИ, НЕ) для манипуляции высказываниями как математическими объектами.

Его работы легли в основу математической логики. В XX веке булева алгебра и двоичная система были применены для описания электрических схем, что заложило фундамент для создания цифровых компьютеров. Буль по праву считается основателем этой науки.

Булева алгебра

Логическими высказываниями являются утвердительные предложения, о которых можно судить, истинны они или ложны. Причем они не могут быть истинными и ложными одновременно.

Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.

Логика высказываний рассматривает эти предложения не с точки зрения их смысла, содержания, а только с точки зрения их истинности или ложности. Для понятия «высказывание» иногда используют термин «пропозиция», а говоря «пропозициональный», подразумевают относящийся к логике высказываний.

Классический пример утверждения, не являющегося высказыванием, таков:

Все, что написано подчеркнутым шрифтом - ложь

Действительно, попытка определить истинностное значение этого «высказывания» приводит к противоречию: если то, что написано, истинно, то это противоречит смыслу слов в рамке. То же противоречие возникает, если предположить, что оно ложно. Вопросительные, повелительные и бессмысленные предложения не являются логическими высказываниями.

Говорят, что если предложение истинно, то его значение истинности равно $I(1)$, если ложно — то $L(0)$. По аналогии с элементарной алгеброй, где любое число является константой, высказывание является логической константой, величина которой равна $L(0)$ или $I(1)$.

Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "не", "и", "или", "если... , то",

"тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания. Такие слова и словосочетания называются логическими связками.

Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связей, называются составными. Высказывания, не являющиеся составными, называются элементарными.

Истинность или ложность получаемых таким образом составных высказываний зависит от истинности или ложности элементарных высказываний.

Каждая логическая связка соответствует операции над логическими высказываниями и имеет свое название и обозначение.

Основные операции

Операция, выражаемая словом "не", называется отрицанием и обозначается чертой над высказыванием (или знаком $\neg$)

Основное свойство: отрицание инвертирует логическое значение.

Операция, выражаемая связкой "и", называется конъюнкцией (лат. conjunctio — соединение) или логическим умножением и обозначается точкой "." (может также обозначаться знаками $\wedge$ или $\&$)

Основное свойство: Высказывание $A \wedge B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Операция, выражаемая связкой "или" (в неисключающем смысле этого слова), называется дизъюнкцией (лат. disjunctio — разделение) или логическим сложением и обозначается знаком $\vee$ (или плюсом).

Основное свойство: Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.

Постулаты булевой алгебры (Аксиомы):

1) $\neg(\neg a) = a$ (двойное отрицание)

2) $A \vee B = B \vee A$; $A \wedge B = B \wedge A$ (коммутативность)

3) $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$
 $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ (ассоциативность)

4) $A \vee (A \wedge B) = A$
 $A \wedge (A \vee B) = A$ (поглощение)

$$5) \begin{aligned} A \vee (\neg A) &= \text{И} \\ A \wedge (\neg A) &= \text{Л} \end{aligned} \quad \left(\text{Комплементарность} \right)$$

$$6) \begin{aligned} \neg \text{И} &= \text{Л} \\ \neg \text{Л} &= \text{И} \end{aligned} \quad \left(\text{Две посылки} \cup \cup \right)$$

$$7) \begin{aligned} A \vee A &= A \\ A \wedge A &= A \end{aligned} \quad \left(\text{Идентичность} \right)$$

$$8) \begin{aligned} A \vee \text{И} &= \text{И} \\ A \vee \text{Л} &= A \end{aligned}$$

$$9) \begin{aligned} A \wedge \text{И} &= A \\ A \wedge \text{Л} &= \text{Л} \end{aligned}$$

$$10) \begin{aligned} A \vee (B \wedge C) &= (A \vee B) \wedge (A \vee C) \\ A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \end{aligned} \quad \left(\text{Дистрибутивность} \right)$$

Приоритет операций:

() ①

$\neg$ ①

$\wedge$ ②

$\vee$ ③

Тренировка:

Задача 1. Среди приведенных ниже предложений указать те, которые являются высказываниями, и те, которые не являются:

- 1) Екатеринбург – столица Урала;
- 2) студент Уральского федерального университета;
- 3) Луна – спутник Земли;
- 4) $x < 0$;
- 5) число $\sqrt{5}$ – иррациональное.

1.3. Пусть x – высказывание «Студент Сидоров изучает информатику», y – высказывание «Студент Сидоров успевает по математической логике». Дать словесную формулировку следующих высказываний: 1) $x \& \bar{y}$, 2) $\bar{y} \leftrightarrow \bar{x}$, 3) $x \rightarrow y$.

1.8. Пусть x , y , z и w означают соответственно элементарные высказывания «3 – простое число», «3 – составное число», «4 – простое число», «4 – составное число». Какие из следующих составных высказываний истинны, а какие ложны: 1) $x \vee z$, $x \vee w$, $y \vee z$, $y \vee w$; 2) $\bar{x} \& \bar{z}$, $\bar{x} \& \bar{w}$, $\bar{y} \& \bar{z}$, $\bar{y} \& \bar{w}$?

1.7. Выяснить, при каких значениях y следующие данные противоречивы:

- 1) $x = 0$, $x \& y = 1$; 2) $x = 0$, $x \vee y = 1$; 3) $x = 1$, $x \& y = 0$; 4) $x = 1$, $x \vee y = 0$.