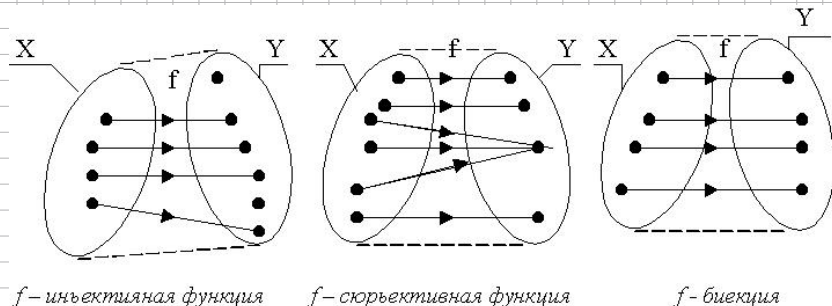


Лекция 1.

основные представления о множествах. сюръективные, инъективные и биективные отображения. равномощность множеств. числовые множества. счетные множества, теорема о несчетности множества $\mathbb{R}$. принцип вложенных отрезков.



Предварительно обратимся вновь к общей теории множеств, а именно рассмотрим способы задания множеств. Если множество A конечно, и число элементов в нём не слишком велико, то A можно задать, перечислив его элементы:

$$A = \{a, b, \dots, c\}.$$

В случае бесконечного множества или множества, содержащего слишком много элементов, такой способ не годится, и множество задают, указывая характеристическое свойство его элементов (т.е. свойство, присущее тем и только тем элементам, из которых состоит данное множество). Например, если множество X состоит из всех элементов x , для которых выполняется свойство $P(x)$, то пишут

$$X = \{x \mid P(x)\}$$

Пустое множество $\emptyset$, которое не содержит элементов, пользуясь этим способом, можно задать так:

$$\emptyset = \{x \mid (x \in X) \& (x \neq x)\} = \{x \mid x \in X, x \neq x\},$$

где X — какое-либо множество (любое).

Говорят, что множество A есть подмножество множества B , если для любого $x \in A$ выполняется также включение $x \in B$. В этом случае пишут $A \subset B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B равны: $A = B$. Рассмотрим стандартные операции над множествами. Объединением $A \cup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B . Аналогично определяется объединение любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_i — произвольные множества, занумерованные с помощью множества индексов I , то их объединение $\bigcup_{i \in I} A_i$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_i .

Назовём пересечением $A \cap B$ множеств A и B множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A , так и B . Пересечением любого числа множеств A_i называется совокупность $\bigcap_{i \in I} A_i$ элементов, принадлежащих каждому из множеств A_i (как и выше, I есть некоторое множество индексов, с помощью которого занумерованы множества A_i). Операции объединения и пересечения множеств, очевидно, коммутативны и ассоциативны, т.е.

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ A \cap B &= B \cap A, & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$

Кроме того, эти операции взаимно дистрибутивны:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Докажем, например, последнее из этих равенств. В соответствии с определением равенства множеств, надо доказать два включения

$$(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C) \quad (9)$$

и

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C. \quad (10)$$

Пусть $x \in (A \cap B) \cup C$. Тогда $x \in A \cap B$ или $x \in C$. Если $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$, следовательно, $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$, т.е. $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Если же $x \in C$, то, как и выше, $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$, и $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Таким образом, включение (9) доказано.

Пусть теперь $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Тогда $x \in A \cup C$ и $x \in B \cup C$. Если $x \in C$, то $x \in (A \cap B) \cup C$. Если же $x \notin C$, то $x \in A$ и $x \in B$, т.е. $x \in A \cap B$, и $x \in (A \cap B) \cup C$. Мы видим, что включение (10) также справедливо. Из (9) и (10) следует требуемое равенство.

Рассмотрим ещё разность множеств $A \setminus B$. Так называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих A , но не принадлежащих B . Часто приходится рассматривать множества, являющиеся подмножествами некоторого основного множества M . В этом случае (т.е. если $A \subset M$) разность $M \setminus A$ называют дополнением множества A до множества M и обозначают $\bar{A}$.

Перейдём теперь к множеству действительных чисел $\mathbb{R}$. Перечислим основные свойства элементов этого множества. Действительные числа можно складывать, получая в качестве суммы вновь действительные числа. При этом для любых действительных чисел a, b, c выполняются равенства:

- 1) $a + b = b + a$ — сложение коммутативно;
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ — сложение ассоциативно;
- 3) существует 0, т.е. такое число, что $a + 0 = a$ для любого a ;
- 4) у каждого числа a есть противоположное число $-a$ такое, что $a + (-a) = 0$.

Действительные числа можно перемножать, получая в результате вновь действительные числа. При этом

- 5) $ab = ba$ — умножение коммутативно;
- 6) $(ab)c = a(bc)$ — умножение ассоциативно;
- 7) существует единица $1 \neq 0$, т.е. такое число, что для любого a выполняется равенство $a \cdot 1 = a$;
- 8) для любого $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} , для которого $a \cdot a^{-1} = 1$.

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению:

- 9) $(a + b)c = ac + bc$.

Множество действительных чисел упорядочено. Это значит, что для любых действительных чисел a и b выполняется одно (и только одно) из соотношений:

$$a < b, \quad b < a, \quad a = b.$$

При этом

10) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ — отношение порядка транзитивно;

11) если $a < b$, то $a + c < b + c$;

12) если $a < b$, и $c > 0$, то $ac < bc$.

Следующее (и последнее) свойство характеризует полноту множества $\mathbb{R}$ действительных чисел.

13) Для любых непустых множеств $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$ таких, что для каждой пары чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$, существует число c , которое не меньше любого числа из A и не больше любого числа из B .

В формулировке этого свойства запись $a \leq b$ означает, что либо $a < b$, либо $a = b$, т.е.

$$(a \leq b) \Leftrightarrow ((a < b) \vee (a = b)).$$

Перечисленные свойства полностью определяют множество действительных чисел в том смысле, что из этих свойств следуют и все остальные его свойства.

Напомним, что осью называют прямую, на которой зафиксировано одно из двух возможных направлений. Рассмотрим некоторую ось l . Будем считать, что она расположена горизонтально, а направление на ней выбрано слева направо. Как известно, между множеством $\mathbb{R}$ действительных чисел и множеством точек оси l можно установить взаимно однозначное соответствие (это означает, что разным числам соответствуют разные точки оси, и каждой точке соответствует хотя бы одно (а на деле в точности одно) действительное число). Для установления такого соответствия надо выбрать на оси l начало отсчёта т.е. точку, которой соответствует число 0 и справа от неё — точку 1 (точнее, точку, которой соответствует число 1). В результате на оси появится единственный отрезок, с помощью которого можно измерять расстояния между её точками. Затем каждому числу $x \in \mathbb{R}$ поставим в соответствие точку на расстоянии $|x|$ от начала отсчёта слева или справа в зависимости от знака x . Подробности не рассматриваем, т.к. они хорошо известны; напомним лишь определение понятия абсолютной величины (модуля) действительного числа:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Мы будем использовать геометрический язык, связанный с установленным соответствием: ось l будем называть числовой осью или числовой прямой, действительные числа будем отождествлять с точками этой прямой. Рассмотрим наиболее часто используемые в анализе подмножества $\mathbb{R}$. Интервал (a, b) числовой прямой задаётся так:

$$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\}.$$

Для удобства некоторых формулировок к множеству $\mathbb{R}$ добавляют два элемента $+\infty$ (плюс бесконечность) и $-\infty$ (минус бесконечность). При этом считается, что $-\infty < +\infty$, и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется двойное неравенство $-\infty < x < +\infty$. Всё же символы $-\infty$ и $+\infty$ не являются действительными числами, и мы не будем производить над ними арифметических операций. С помощью новых символов удобно записывать бесконечные интервалы. Пусть снова a и b — действительные числа. Бесконечные интервалы определяются так:

$$(-\infty, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < b\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > a\}.$$

Аналогично определяются полуинтервалы (конечные и бесконечные):

$$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq b\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq a\},$$

а также отрезки

$$[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Интервалы, полуинтервалы и отрезки называются промежутками числовой прямой. Заметим, что в определениях, подобных рассмотренным выше, часто не указывают включение $x \in \mathbb{R}$ (если и так ясно, что x — действительное число). Например, отрезок можно определить так:

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}.$$

Окрестностью $U(x)$ точки x называют любой интервал, содержащий эту точку; ε -окрестностью точки x (при положительном ε) называют интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. Окрестностями точек $-\infty$ и $+\infty$ называют соответственно интервалы вида $(-\infty, a)$ и $(a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число. Иногда рассматривают бесконечность ∞ «без знака». Окрестностью такой бесконечности называют объединение двух бесконечных интервалов $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, где a — произвольное действительное число.

Опираясь на свойство полноты множества действительных чисел (свойство 13 в нашей нумерации), можно доказать лемму о вложенных отрезках.

Лемма. Для любой последовательности

$$I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$$

вложенных отрезков найдётся точка $c \in \mathbb{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.

* Доказательство. Пусть $I_m = [a_m, b_m]$ и $I_n = [a_n, b_n]$ — два различных отрезка рассматриваемой последовательности. Тогда $a_m \leq b_n$. В самом деле, если это не так, т.е. если $a_m > b_n$, то $a_n \leq b_n < a_m \leq b_m$, и отрезки I_m и I_n не имеют общих точек, в то время как по условию один из них (тот, у которого номер больше) должен содержаться в другом. Мы видим, что для числовых множеств $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$, т.е. для множеств соответственно левых и правых концов рассматриваемых отрезков, выполнены условия свойства полноты. Поэтому существует число c , для которого $a_n \leq c \leq b_n$ при всех $n = 1, 2, 3, \dots$, т.е. c принадлежит всем отрезкам I_n . Лемма доказана. *

Числовые мн-ва:

$\mathbb{N}$ — натур.

$\mathbb{Z}$ — целые

$\mathbb{Q}$ — рационал.

$\mathbb{R}$ — веществ. — не счетное

} счетные

Несчетность множества действительных чисел



Теорема

Множество действительных чисел несчётно.

Доказательство (от противного)

- ▶ Пусть множество действительных чисел счетное. Тогда любое подмножество счетного множества тоже счетное.
- ▶ Возьмём на множестве действительных чисел подмножество R_1 – интервал $(0,1)$ и выкинем из этого отрезка числа, содержащие хотя бы в одном своём разряде нули или девятки (примеры таких чисел: 0.9, 0.0001 и т.д.).
- ▶ Множество R_2 , составленное из оставшихся чисел, является подмножеством множества R_1 .

Это означает, что R_2 – счетное.

Доказательство

- ▶ Построим такой список чисел из множества R_2 и пронумеруем числа в разрядах:

0. $a_{11}a_{12}a_{13}...$

0. $a_{21}a_{22}a_{23}...$

.....

0. $a_{n1}a_{n2}a_{n3}...$

- ▶ Теперь построим число $b=0.b_1b_2...$, причём $b_i=a_{ii}+1$, где $+$ обозначает операцию сложения, результатом которого не могут быть числа 0 и 9, т.е. если $a_{ii}=1$, то $b_i=2$; если $a_{ii}=2$, то $b_i=3$, ..., если $a_{ii}=8$, то $b_i=1$.

- ▶ Таким образом, построенное число b будет отличаться от каждого из чисел множества R_2 хотя бы в одном разряде, и, следовательно, не попадёт в составленный список. Однако по своей структуре число b должно содержаться в множестве R_2 . Получили противоречие, значит исходное предположение неверно и множество R_2 – несчётно.

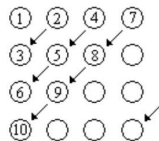
- ▶ Так как множество R_2 является по условию подмножеством множества R_1 , то R_1 – несчётно, а т.к. R_1 несчётно – то значит и множество R несчётно, Q.E.D.

Теорема. Множество всех рациональных чисел счетно.

► Расположим все рациональные числа в таблицу, содержащую бесконечное число строк и столбцов, следующим образом (см. таблицу):

0	1	-1	2	-2	...
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	...
.....					
$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	...	...	...	...
.....					

Здесь в n -ю строчку помещены рациональные числа, записываемые несократимыми рациональными дробями со знаменателем n и упорядоченные по возрастанию их абсолютных величин, причем непосредственно за каждым положительным числом следует ему противоположное. Очевидно, что каждое рациональное число находится на каком-то месте в этой таблице.



Занумеруем теперь элементы получившейся таблицы согласно следующей схеме, в которой в кружочках стоят номера соответствующих элементов, а стрелки указывают направление нумерации. В результате все рациональные числа оказываются занумерованными, т. е. множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел счетно. ◀

Тренировка:

- Решите неравенство:
 - $(x+1)(x-2)(x+5) > 0$;
 - $x(x-3)(x+2) < 0$;
 - $(2x-1)(3-x)(x+1) < 0$;
 - $(2x+3)(3x-1)(x+4) > 0$.
- Решите неравенство:
 - $(2x+1)(x-3)(x^2+4) < 0$;
 - $(2-x)(3x+5)(x^2-x+1) > 0$;
 - $(2x+1)^2(x^2-4x+3) > 0$.
- Решите неравенство:
 - $\frac{x+3}{x-1} > 0$;
 - $\frac{(x-2)(x+1)}{x-4} < 0$;
 - $\frac{(2x+1)(x-3)}{(2-x)(x-5)} < 0$;
 - $\frac{x^3(x-1)^4(x+5)}{(x-8)(1-4x)} > 0$.
- Решите неравенство:
 - $\frac{1}{x} < 1$;
 - $\frac{x}{x+3} > \frac{1}{2}$;
 - $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$;
 - $\frac{4}{x+1} + \frac{2}{1-x} < 1$.