

Лекция 11.

Полное исследование числовой функции.

Напомним некоторые определения. Функция $f(x)$, определенная на промежутке I , называется неубывающей на этом промежутке, если для любых точек x_1 и x_2 этого промежутка из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$. Если последнее неравенство заменить на $f(x_2) \leq f(x_1)$, $f(x_2) > f(x_1)$ или $f(x_2) < f(x_1)$, то получим определения соответственно невозрастающей, возрастающей и убывающей функций. Все такие функции называются монотонными, а две последние — строго монотонными.

Теорема (необходимые и достаточные условия монотонности функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех точках этого промежутка за исключением, быть может, конечного их числа. Для того, чтобы эта функция была неубывающей на промежутке I , необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была неотрицательна всюду, где она определена.

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$ не убывает на промежутке I . Тогда в точке $x \in I$, в которой функция $f(x)$ дифференцируема, имеем

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0,$$

$$\text{т.к. } f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0, \text{ и } \Delta x > 0.$$

Если x — правый конец промежутка I , причём $x \in I$, то следует взять $\Delta x < 0$; результат будет тем же. Таким образом, $f'(x) \geq 0$, и необходимость доказана; заметим, что непрерывность функции $f(x)$ здесь не понадобилась.

Достаточность. Пусть во всех точках промежутка I , в которых $f(x)$ дифференцируема, выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$, и пусть x_1 и x_2 , $x_2 > x_1$, — произвольные

точки этого промежутка. Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (x_1, x_2) , то, применяя к отрезку $[x_1, x_2]$ теорему Лагранжа, получаем:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0, \text{ т.е. } f(x_2) \geq f(x_1).$$

Если же на интервале (x_1, x_2) имеются точки $x_1 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < x_2$, в которых производная функции $f(x)$ не существует, то можно применить теорему Лагранжа к каждому из отрезков $[x_1, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \dots, [\xi_n, x_2]$. В результате, как и выше, получим $f(x_1) \leq f(\xi_1) \leq f(\xi_2) \leq \dots \leq f(\xi_n) \leq f(x_2)$, т.е. $f(x_1) \leq f(x_2)$. Мы видим, что $f(x)$ и в самом деле не убывает на промежутке I . Достаточность доказана. Теорема доказана.

Можно доказать аналогичную теорему и для невозрастающей функции $f(x)$; в этом случае (при выполнении прочих условий теоремы) надо потребовать, чтобы производная $f'(x)$ была неположительной всюду, где она определена.

Теорема (достаточные условия возрастания функции на промежутке). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и дифференцируема во всех его точках за исключением, быть может, конечного их числа. Если производная $f'(x)$ неотрицательна всюду, где она определена, и не равна тождественно нулю ни на одном интервале $I_1 \subset I$, то функция $f(x)$ возрастает на I .

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что $f(x)$ не убывает на I . Пусть для некоторых точек x_1 и x_2 , $x_1 < x_2$, этого промежутка $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда для любой точки $x \in (x_1, x_2)$ имеем $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Это означает, что функция $f(x)$ постоянна на (x_1, x_2) , и, следовательно, $f'(x)$ тождественно равна нулю на этом интервале, что противоречит условиям теоремы. Поэтому на деле $f(x_1) \neq f(x_2)$, а тогда $f(x_1) < f(x_2)$, и функция $f(x)$ возрастает на I . Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива и в отношении убывающих функций. Надо только в условиях теоремы неотрицательность производной заменить на неположительность.

Примеры. Из доказанной теоремы следует, например, что всюду возрастают функции $y = e^x$, $y = x^3$, $y = \operatorname{arctg} x$; функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ возрастают на полуинтервале $[0, +\infty)$; функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а функция $y = \cos x$ убывает на $[0, \pi]$.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет **локальный максимум** в точке x_0 , если существует окрестность $U(x_0)$ этой точки такая, что для любого $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$. Если последнее неравенство заменить на $f(x) \geq f(x_0)$, то мы получим определение **локального минимума**. А если потребовать, чтобы для всех $x \neq x_0$ выполнялось строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ или $f(x) > f(x_0)$, то получится определение соответственно **строгого локального максимума** и **строгого локального минимума**. Во всех этих четырех случаях точка x_0 называется точкой **локального экстремума**; в двух последних случаях говорят о точке строгого локального экстремума. Из теоремы Ферма следует, что если в точке экстремума x_0 функции $f(x)$ существует производная, то эта производная равна нулю: $f'(x_0) = 0$. Таким образом, в точках экстремума производная функции **либо не существует, либо равна нулю**. Равенство нулю производной является лишь необходимым условием наличия в этой точке экстремума. Достаточным это условие не является. Рассмотрим, например, функцию $y = x^3$. Эта функция всюду возрастает, однако, $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$. Точки, в которых производная функции равна нулю, называются стационарными точками этой функции. Точки, в которых производная функции равна нулю, бесконечности или не существует, называются критическими точками функции (а также точками, подозрительными на экстремум). Если функция, определенная в проколотой окрестности $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, точки x_0 принимает положительные значения во всех точках интервала $(x_0 - \delta, x_0)$ и отрицательные значения во

всех точках интервала $(x_0, x_0 + \delta)$, то говорят, что эта функция меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0 . Аналогично определяется ситуация, когда функция меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0 . Если во всех точках указанной проколотой окрестности функция принимает значения одного знака, то говорят, что функция сохраняет знак в проколотой окрестности точки x_0 .

Рассмотрим теоремы о достаточных условиях наличия экстремума.

Теорема (первая теорема о достаточном условии наличия экстремума). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, точки x_0 и дифференцируема в проколотой окрестности $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ этой точки. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку x_0 , то в этой точке функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум, а если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через x_0 , то функция $f(x)$ имеет в этой точке строгий локальный максимум. Если же $f'(x)$ сохраняет знак в проколотой окрестности точки x_0 , то экстремума в этой точке нет.

Доказательство. Рассмотрим первое утверждение теоремы. Если $f'(x) < 0$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, то на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$ функция $f(x)$ убывает, и для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ имеем по теореме о достаточных условиях убывания функции неравенство $f(x) > f(x_0)$. На полуинтервале $[x_0, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ возрастает, и $f(x_0) < f(x)$ для всех $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Мы видим, что x_0 и в самом деле есть точка строгого локального минимума. Аналогично доказывается и второе утверждение теоремы. В случае последнего утверждения функция $f(x)$ либо возрастает, либо убывает на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ в зависимости от знака производной $f'(x)$; экстремума в точке x_0 в обоих случаях нет. Теорема доказана.

Теорема (вторая теорема о достаточном условии наличия экстремума). Пусть в точке x_0 у функции $f(x)$ существуют все производные до n -го порядка включительно, причем $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если n четно, и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум. Если n четно, и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 строгий локальный максимум. Если n нечетно, то экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство. Запишем для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано; в силу условия $f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ имеем такое равенство:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

Отсюда

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{n!}(f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)) \cdot (x - x_0)^n, \quad (1)$$

$$\text{где} \quad \alpha(x) = n! \frac{o((x - x_0)^n)}{(x - x_0)^n} \longrightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Пусть теперь n четно, и $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow x_0} (f^{(n)}(x_0) + \alpha(x)) = f^{(n)}(x_0) > 0,$$

и по теореме о сохранении функцией знака своего предела существует проколотая окрестность $\dot{U}(x_0)$ точки x_0 такая, что $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0$ для всех $x \in \dot{U}(x_0)$. Далее, т.к. n четно, то также и $(x - x_0)^n > 0$ для указанных x . Поэтому из (1) следует, что для всех $x \in \dot{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$, т.е. в точке x_0 функция $f(x)$ имеет строгий локальный минимум. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. Пусть n нечетно, и пусть для определенности $f^{(n)}(x_0) > 0$. Тогда, как и выше,

найдется проколота окрестность $\dot{U}(x_0)$ такая, что для любого $x \in \dot{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f^{(n)}(x_0) + \alpha(x) > 0$. Поскольку n нечетно, то при $x < x_0$ имеем неравенство $(x - x_0)^n < 0$, а при $x > x_0$ — неравенство $(x - x_0)^n > 0$. Поэтому из (1) получаем, что при $x < x_0$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$, а при $x > x_0$ — неравенство $f(x) > f(x_0)$, если, конечно, $x \in \dot{U}(x_0)$. Мы видим, что экстремума в точке x_0 нет. К такому же выводу мы придем, если предположим, что $f^{(n)}(x_0) < 0$. **Теорема доказана.**

Чаще всего эту теорему применяют при $n = 2$, т.е. наличие экстремума и его характер определяют по знаку $f''(x_0)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) . Говорят, что функция $f(x)$ является **выпуклой вверх (вниз)** на этом интервале, если для любой касательной к графику этой функции каждая точка касательной, отличная от точки касания, лежит выше (ниже) точки графика функции с той же абсциссой. Точка $x_0 \in (a, b)$ называется **точкой перегиба** функции $f(x)$, если эта функция непрерывна в точке x_0 и если существует $\delta > 0$ такое, что направления выпуклости функции $f(x)$ на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ различны (т.е. при переходе через точку перегиба направление выпуклости функции меняется на противоположное). Точка $(x_0, f(x_0))$ называется при этом **точкой перегиба** графика функции $y = f(x)$.

Теорема (достаточные условия выпуклости функции). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) , причем в каждой точке $x \in (a, b)$ выполняется неравенство $f''(x) > 0$. Тогда функция $f(x)$ выпукла вниз на указанном интервале. Если же во всех точках интервала (a, b) вторая производная $f''(x)$ отрицательна, то функция $f(x)$ выпукла вверх на этом интервале.

Доказательство. Докажем лишь первое утверждение теоремы (второе доказывается аналогично). Рассмотрим касательную к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$, $x_0 \in (a, b)$. Уравнение такой касательной, как известно, имеет вид $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Пусть для определенности $x_0 < x < b$. Тогда разность ординат точки касательной $(x, f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$ и точки графика $(x, f(x))$ равна $\Delta y = f(x_0) - f(x) + f'(x_0)(x - x_0)$. По теореме Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$. Поэтому $\Delta y = (f'(x_0) - f'(c))(x - x_0)$, $c \in (x_0, x)$. Применим еще раз теорему Лагранжа: $\Delta y = -f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$, $c_1 \in (x_0, c)$. Здесь $f''(c_1) > 0$, $c - x_0 > 0$, $x - x_0 > 0$, поэтому $\Delta y < 0$, и точка касательной лежит ниже соответствующей точки графика функции. Аналогично можно доказать это утверждение и в случае $a < x < x_0$. Таким образом, точки касательной лежат ниже соответствующих точек графика функции, и функция $f(x)$ выпукла вниз на интервале (a, b) . Теорема доказана.

Теорема (необходимые условия наличия точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0 , причем вторая производная непрерывна в указанной точке. Тогда если x_0 — точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $f''(x_0) \neq 0$, и пусть для определенности $f''(x_0) > 0$. Тогда в силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, этой точки такая, что $f''(x) > 0$ во всех точках этой окрестности. Тогда на обоих интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, что противоречит наличию перегиба в точке x_0 . Поэтому на деле $f''(x_0) = 0$, и теорема доказана.

Как и в случае точек экстремума условие $f''(x_0) = 0$ лишь необходимо для наличия перегиба в соответствующей точке. Достаточным это условие не является, как показывает пример функции $y = x^4$. Здесь $y''(0) = 12x^2|_{x=0} = 0$, однако эта функция выпукла вниз на интервале $(-\infty, \infty)$ и не имеет перегиба при $x = 0$.

Теорема (первое достаточное условие наличия точки перегиба). Пусть функция

$f(x)$ определена в окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $\delta > 0$, точки x_0 и непрерывна в указанной точке. Тогда если в соответствующей проколотой окрестности $(x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta)$ функция $f(x)$ имеет вторую производную, которая меняет знак при переходе через точку x_0 , то точка x_0 есть точка перегиба функции $y = f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности вторая производная $f''(x)$ положительна при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и отрицательна при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда на $(x_0 - \delta, x_0)$ функция $f(x)$ выпукла вниз, а на $(x_0, x_0 + \delta)$ выпукла вверх, т.е. при переходе через точку x_0 направление выпуклости меняется на противоположное. Отсюда следует, что x_0 — точка перегиба функции $f(x)$. Теорема доказана.

Теорема (второе достаточное условие наличия точки перегиба). Пусть функция $f(x)$ трижды дифференцируема в точке x_0 , причем $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$. Тогда x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f'''(x_0) > 0$. Тогда

$$f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 -} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 -} \frac{f''(x)}{x - x_0}.$$

Выражение $\frac{f''(x)}{x - x_0}$ в некоторой левосторонней проколотой окрестности $(x_0 - \delta_1, x_0)$, $\delta_1 > 0$, должно иметь знак своего предела $f'''(x_0)$, т.е. $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$, а тогда (т.к. $x - x_0 < 0$) выполняется неравенство $f''(x) < 0$. Аналогично

$$f'''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 +} \frac{f''(x) - f''(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0 +} \frac{f''(x)}{x - x_0},$$

и $\frac{f''(x)}{x - x_0} > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta_2)$, $\delta_2 > 0$, т.е. $f''(x) > 0$ при указанных x .

Мы видим, что вторая производная $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 . По предыдущей теореме x_0 есть точка перегиба функции $f(x)$. Теорема доказана.

При построении графика функции следует предварительно выяснить его характерные особенности. При этом можно руководствоваться, например, такой схемой.

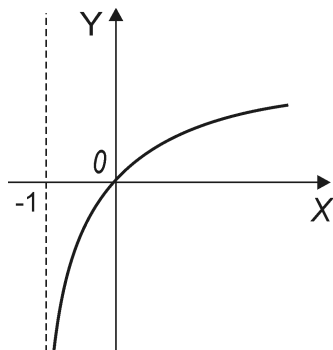
1. Найти область определения функции, выяснить, является ли функция четной, нечетной или периодической.
2. Найти точки пересечения графика функции с осями координат. Определить интервалы, на которых функция сохраняет знак.
3. Определить точки разрыва, выяснить характер разрывов, найти вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции при стремлении аргумента к $\pm\infty$ и найти наклонные асимптоты.
5. Определить интервалы монотонности и найти точки экстремумов.
6. Определить интервалы выпуклости, найти точки перегиба.

Пример. Пусть требуется построить график функции $y = \ln(1 + \sqrt[3]{x})$. Здесь функция определена при $1 + \sqrt[3]{x} > 0$, т.е. при $x > -1$. Специальными свойствами, указанными в первом пункте приведенной выше схемы, данная функция не обладает (про такую функцию говорят, что она «общего вида»). Решая уравнение $\ln(1 + \sqrt[3]{x}) = 0$ находим единственную точку $x = 0$ пересечения графика с осью абсцисс; функция отрицательна на интервале $(-1, 0)$ и положительна на $(0, +\infty)$. Данная функция, очевидно, непрерывна всюду,

где она определена; $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) = -\infty$. Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой. Далее,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) = \infty.$$

Наклонных асимптот нет. По результатам проведенного исследования можем нарисовать предварительный эскиз графика функции.



Дифференцируем: $y' = \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$

Сведения о производной можно занести в таблицу:

x	$(-1, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$y'(x)$	$+$	$+\infty$	$+$
$y(x)$	$\nearrow$ возрастает	экстремума нет	$\nearrow$ возрастает

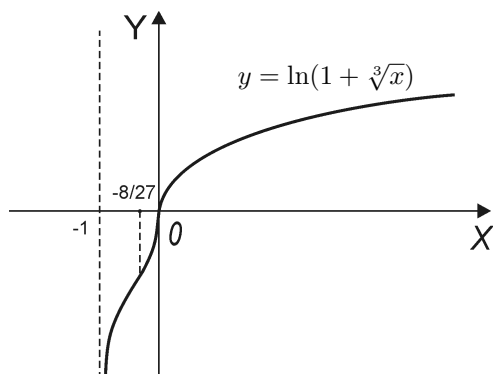
Дифференцируем еще раз:

$$y'' = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}(1 + \sqrt[3]{x})} \right)' = -\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(1 + \sqrt[3]{x}) + \frac{1}{3}}{3\sqrt[3]{x^4}(1 + \sqrt[3]{x})^2} = -\frac{2 + 3\sqrt[3]{x}}{9x\sqrt[3]{x^2}(1 + \sqrt[3]{x})^2}.$$

Составляем таблицу для второй производной:

x	$\left(-1, -\frac{8}{27}\right)$	$-\frac{8}{27}$	$\left(-\frac{8}{27}, 0\right)$	0	$(0, +\infty)$
$y''(x)$	$-$	0	$+$	не опред.	$-$
$y(x)$	$\cap$ выпукла вверх	точка перегиба	$\cup$ выпукла вниз	точка перегиба	$\cap$ выпукла вверх

Рисуем уточненный эскиз графика функции.



Раскрыть неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$5.329. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{\sin 2x}. \quad 5.330. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}.$$

$$5.331. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}, \quad m \neq n, a \neq 0. \quad (\text{правило Лопиталя - Бернулли})$$

$$5.332. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{c^x - d^x}, \quad a \neq b, \quad c \neq d.$$

Для заданных функций написать формулу Маклорена n -го порядка:

$$5.382. y = e^x. \quad 5.383. y = \sin x. \quad 5.384. y = \cos x.$$

(Формула Маклорена - это ф. Тейлора при $x \rightarrow 0$)

Построить графики следующих функций:

$$5.461. y = \frac{(x^2 - 5)^3}{125}. \quad 5.462. y = \frac{1}{4} x^2 (x^2 - 3)^2.$$

$$5.463. y = \frac{1}{6} x^3 (x^2 - 5). \quad 5.464. y = \frac{x^3}{2(x-1)^2}.$$

$$5.465. y = \frac{x^4}{x^3 - 1}. \quad 5.466. y = \frac{x^3 - 3x}{x^2 - 1}. \quad 5.467. y = \frac{x^4}{x^3 + 1}.$$

$$5.468. y = \frac{x}{x^3 + 2}. \quad 5.469. y = \frac{x^3}{x^4 - 1}. \quad 5.470. y = \frac{x^3}{x^3 - 1}.$$

$$5.471. y = \frac{x}{x^2 - 4}. \quad 5.472. y = \frac{x^3}{x^2 - 3}. \quad 5.473. y = \frac{x}{2 - x^3}.$$

$$5.474. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}. \quad 5.475. y = \frac{x^3}{x^3 + 1}.$$

$$5.476. y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}. \quad 5.477. y = \sqrt[3]{x^2 - 2x}.$$

$$5.478. y = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

$$5.479. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}. \quad 5.480. y = \sqrt[3]{1-x^3}.$$

$$5.481. y = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}.$$

$$5.482. y = \sqrt[3]{x^3 + 1} + \sqrt[3]{x^3 - 1}.$$