

Лекция 12.

Первообразная, неопределенный интеграл и его свойства. Таблица неопределенных интегралов для элементарных функций. Методы интегрирования.

В дифференциальном исчислении рассматривались методы вычисления производной заданной функции. Теперь мы займемся обратной задачей: по данной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию, для которой $f(x)$ была бы производной.

Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ заданы на одном и том же промежутке I . Функция $F(x)$ называется первообразной для $f(x)$ на этом промежутке, если для любого $x \in I$ существует производная $F'(x)$, равная $f(x)$. Для граничной точки (если она принадлежит I под $F'(x)$) понимается соответствующая односторонняя производная.

Пример. Функция $F(x) = x^3$ является первообразной для $f(x) = 3x^2$ на промежутке $-\infty < x < \infty$; функция $F(x) = \arcsin x$ является первообразной для $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на промежутке $-1 < x < 1$; функция $F(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ является первообразной для $f(x) = \sqrt{x}$ на промежутке $[0; +\infty)$.

Если $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$, то $F(x) + C$, где C — постоянная, также будет первообразной этой функции (т.к. $F'(x) = (F(x) + C)'$).

Далее, если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные функции $f(x)$, то $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$. Поэтому в силу известного условия постоянства функции на промежутке разность $F(x) - G(x)$ является константой, т.е. $F(x) - G(x) = C$. Таким образом, вся совокупность первообразных функции $f(x)$ описывается выражением $F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-либо фиксированная первообразная, а C — произвольная постоянная. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ (на некотором промежутке) называется неопределенным интегралом и обозначается

$$\int f(x)dx;$$

при этом символ $\int$ называется интегралом; $f(x)$ называется подынтегральной функцией; $f(x)dx$ — подынтегральным выражением; x — переменной интегрирования. Из вышесказанного следует, что если $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная. Восстановление функции по ее производной (или, что тоже самое, отыскание соответствующего неопределенного интеграла) называется интегрированием этой функции. Интегрирование представляет собой операцию, обратную по отношению к операции дифференцирования.

Для того, чтобы проверить, правильно ли выполнено интегрирование, достаточно продифференцировать результат и получить при этом подынтегральную функцию.

Пример. Проверим, что при $a \neq 0$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Имеем

$$\left(\frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \right)' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{x^2 + a^2}.$$

Впоследствии будет доказано, что всякая функция, непрерывная на некотором промежутке, имеет на этом промежутке первообразную. Всюду в дальнейшем будем считать, что функции, стоящие под знаком интеграла, непрерывны; если же подынтегральная функция имеет точки разрыва, то будем рассматривать эту функцию лишь на тех промежутках, на которых она непрерывна.

Поэтому все первообразные, о которых будет идти речь, существуют, и мы не будем это каждый раз особо оговаривать.

Пример. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке I . Тогда, как известно из курса дифференциального исчисления, на любом промежутке $I_1 \subset I$, не содержащем нулей рассматриваемой функции, выполняется равенство

$$(\ln |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Поэтому

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C;$$

в частности,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C,$$

причем применять последнюю формулу можно на любом промежутке, не содержащем нуля. Рассмотрим **основные свойства неопределенного интеграла**, непосредственно вытекающие из соответствующего определения.

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x); \quad d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int F(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель, отличный от нуля, можно вынести за знак неопределенного интеграла, т.е.

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx, \quad \alpha \neq 0.$$

В самом деле, пусть

$$\int f(x) dx = F(x) + C;$$

тогда $\alpha F(x)$ — одна из первообразных функции $\alpha f(x)$, и

$$\int \alpha f(x) dx = \alpha F(x) + C.$$

Поэтому доказываемое равенство принимает вид:

$$\alpha F(x) + C = \alpha (F(x) + C).$$

Такое равенство (понимаемое как равенство двух множеств функций) справедливо, т.к. если C пробегает множество всех вещественных чисел, то и αC при $\alpha \neq 0$ также пробегает это множество.

4. Неопределенный интеграл от суммы двух (или большего числа) функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — первообразные соответственно функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то $F_1(x) + F_2(x)$ есть первообразная суммы $f_1(x) + f_2(x)$. Поэтому доказываемое равенство принимает вид

$$F_1(x) + F_2(x) + C = F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2,$$

где C, C_1, C_2 независимо пробегает множество вещественных чисел; само равенство понимается как равенство двух множеств функций. Ясно, что сумму $C_1 + C_2$ в правой части можно "заменить на одну произвольную постоянную", и, следовательно, доказываемое равенство справедливо.

Вычисление неопределенных интегралов основано на применении таблицы основных интегралов и правил интегрирования.

Таблица интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1; 2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1; \int e^x dx = e^x + C;$
4. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
5. $\int \sin x = -\cos x + C;$
6. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0;$
9. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a \neq 0;$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0;$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad a \neq 0.$

Полезно также помнить некоторые интегралы, содержащие гиперболические функции:

12. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$
13. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$
14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$
15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Все приведенные формулы могут быть доказаны дифференцированием правых частей. Проверим, например, формулу 11; имеем

$$(\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}},$$

и мы видим, что данная формула справедлива.

Задачи:

Используя таблицу основных интегралов, найти следующие интегралы:

$$6.15. \int \left(3x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx. \quad 6.16. \int \frac{2x+3}{x^4} dx.$$

$$6.17. \int \sqrt{mx} dx. \quad 6.18. \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$$

$$6.19. \int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}} \right) dx.$$

$$6.20. \int \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}} dx. \quad 6.21. \int \frac{x^3+2}{x} dx.$$

$$6.22. \int 2^x e^x dx. \quad 6.23. \int 2^x (1 + 3x^2 \cdot 2^{-x}) dx.$$

$$6.24. \int (2x + 3 \cos x) dx. \quad 6.25. \int \frac{2 - \sin x}{\sin^2 x} dx.$$

$$6.26. \int \frac{3 - 2 \operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx. \quad 6.27. \int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx.$$

$$6.28. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$6.29*. \text{ а) } \int \operatorname{tg}^2 x dx; \text{ б) } \int \operatorname{th}^2 x dx.$$

$$6.30. \int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x}. \quad 6.31. \int (\arcsin x + \arccos x) dx.$$

$$6.32. \int \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx.$$

$$6.33. \int \frac{dx}{x^2+4}. \quad 6.34. \int \frac{dx}{5-x^2}. \quad 6.35. \int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}.$$

$$6.36. \int \frac{\sqrt{x^2-3} - \sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx. \quad 6.37. \int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx.$$

$$6.38. \int (x+a)(x+b) dx. \quad 6.39. \int (a^{1/3} + x^{1/3})^3 dx.$$

$$6.40. \int \frac{\cos^2 x + 3 \cos x - 2}{\cos^2 x} dx.$$

$$6.41. \text{ а) } \int \operatorname{ctg}^2 x dx; \text{ б) } \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$6.42. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}. \quad 6.43. \int \frac{x^2-9}{x^2-8} dx.$$