

Лекция 2.

Теория множеств. Диаграммы Эйлера-Венна. Формула включений и исключений. Изоморфизмы булевой алгебры. Теорема Стоуна.

Определение 1.1. Под *множеством* S будем понимать любое собрание определенных и различных между собой объектов, мыслимое как единое целое. Эти объекты называются элементами множества S .

Определение 1.2. Под множеством понимают объединение в единое целое определенных вполне различных предметов (объектов), которые при этом называются элементами образуемого ими множества.

Определение 1.3. Множество A называется *подмножеством* множества B , если всякий элемент из A является элементом B . Если A является подмножеством B и B не является подмножеством A , то говорят, что A является строгим (собственным) подмножеством B .

В первом случае обозначают $A \subseteq B$, во втором случае $A \subset B$.

Определение 1.4. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* $\emptyset$, оно является подмножеством любого множества.

Множество U называется *универсальным*, т.е. все рассматриваемые множества являются его подмножеством.

Определение 1.5. Множества A и B считаются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов, пишут $A = B$; $A \neq B$ – в противном случае.

Определение 1.6. Множества A и B считаются *равными*, если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Способы задания множеств:

- 1) перечислением элементов: $M = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, т.е. списком своих элементов;
- 2) характеристическим предикатом: $M = \{x \mid P(x)\}$ (описанием характеристических свойств, которыми должны обладать его элементы);
- 3) порождающей процедурой: $M = \{x \mid x = f\}$, которая описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов.
В таком случае элементами множества являются все объекты, которые могут быть построены с помощью такой процедуры, например, множество всех целых чисел, являющихся степенями двойки.

Примечание. При задании множеств перечислением обозначения элементов обычно заключают в фигурные скобки и разделяют запятыми.

Перечислением можно задавать только конечные множества (число элементов множества конечно, в противном случае множество называется бесконечным).

Характеристический предикат – это некоторое условие, выраженное в форме логического утверждения или процедуры, возвращающей логическое значение. Если для данного элемента условие выполнено, то он принадлежит определяемому множеству, в противном случае – не принадлежит.

Порождающая процедура – это процедура, которая, будучи запущенной, порождает некоторые объекты, являющиеся элементами определяемого множества. Бесконечные множества задаются характеристическим предикатом или порождающей процедурой.

Пример 1.1.

- 1) $M = \{1, 2, 3, 4\}$ – перечисление элементов множества.
- 2) $M = \{m \mid m \in \mathbb{N}, m < 11\}$ – характеристический предикат.
- 3) Числа Фибоначчи задаются условиями (порождающей процедурой):
 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ для $n > 2$.

Определение 1.7. *Мощность* конечного множества A – это число его элементов. Мощность множества обозначают $|A|$.

Пример 1.2. $|\emptyset| = 0, |\{\emptyset\}| = 1$.

Определение 1.8. Множества называются *равномощными*, если их мощности совпадают.

Определение 1.9. Множество всех подмножеств множества A называется *булеаном* $P(A)$.

Известно, что если множество A содержит n элементов, то множество $P(A)$ содержит 2^n элементов. В связи с этим используется также обозначение множества-степени множества A в виде 2^A .

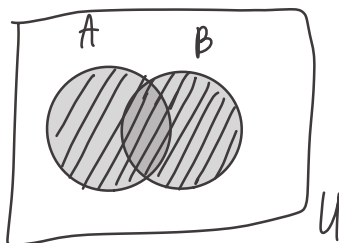
Пример 1.3.

$A = \{0, 1, 2\}, P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$

Диаграммы Эйлера-Венна – геометрические представления множеств. Построение диаграммы заключается в изображении большого прямоугольника, представляющего универсальное множество U , а внутри него – кругов (или каких-нибудь других замкнутых фигур), представляющих множества. Фигуры должны пересекаться в наиболее общем случае, требуемом в задаче, и быть соответствующим образом обозначены. Точки, лежащие внутри различных областей диаграммы, могут рассматриваться как элементы соответствующих множеств. Имея построенную диаграмму, мы можем заштриховать определенные области для обозначения вновь образованных множеств.

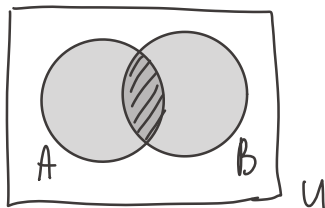
Операции над множествами рассматриваются для получения новых множеств из уже существующих.

Определение 1.10. *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A, B .



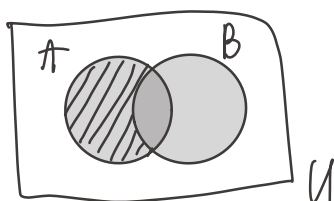
$$A \cup B$$

Определение 1.11. Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно как множеству A , так и множеству B .



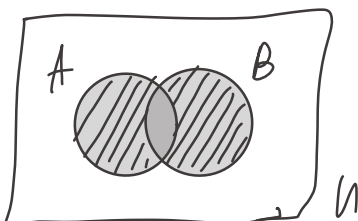
$$A \cap B$$

Определение 1.12. Разностью множеств A и B называется множество всех тех и только тех элементов A , которые не содержатся во множестве B .



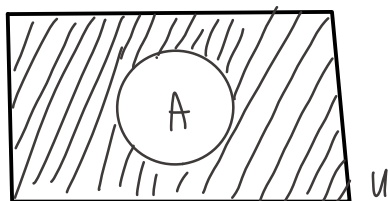
$$A \setminus B$$

Определение 1.13. Симметрической разностью множеств A и B называется множество элементов этих множеств, которые принадлежат либо только множеству A , либо только множеству B .



$$A \oplus B$$

Определение 1.14. Абсолютным дополнением множества A называется множество всех тех элементов, которые не принадлежат множеству A .



$$\bar{A}$$

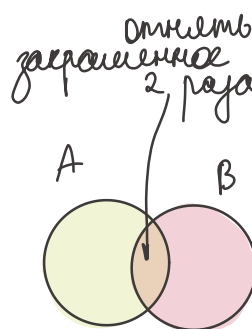
Формула включений и исключений для двух множеств.

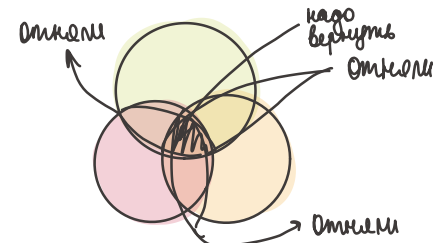
Для любых конечных множеств A и B справедливо равенство $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Доказательство: суммируя мощности множеств A и B , мы дважды учитываем каждый элемент в их пересечении (один раз — со стороны множества A , второй раз — со стороны множества B). Поэтому мощность пересечения надо вычесть.

Формула включений и исключений для трех множеств.

Для любых конечных множеств A , B и C справедливо равенство





$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Почему так получается? Назовём двукратными элементы, входящие в пересечение ровно двух множеств, и трехкратными — элементы, входящие в пересечение трех множеств. Сложив мощности A , B и C , мы дважды учли каждый двукратный элемент и трижды — каждый трёхкратный. Вычтя три попарных пересечения, мы «восстановили справедливость» в отношении двукратных элементов, но теперь оказались полностью неучтенными трехкратные элементы. Поэтому надо добавить мощность тройного пересечения.

Формула включений и исключений.

Для любых конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ справедливо равенство

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1 \leq i < j < k < l} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Выглядит формула громоздко, но суть её проста: сначала суммируем мощности всех множеств (n слагаемых), затем вычитаем мощности всех попарных пересечений (C_n^2 слагаемых), затем прибавляем мощности всех тройных пересечений (C_n^3 слагаемых) и так далее, чередуя знаки, до последнего слагаемого — мощности пересечения всех n множеств.

Для доказательства формулы нам понадобится вспомогательное тождество.

Лемма. Для любого натурального m справедливо равенство $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m+1} C_m^m = 1$

Доказательство леммы. Воспользуемся биномом Ньютона:

$$0 = (1-1)^m = \sum_{k=0}^m 1^k \cdot (-1)^{m-k} \cdot C_m^k = 1 + \sum_{k=1}^m (-1)^k C_m^k = 1 - \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_m^k \Rightarrow$$

Лемма доказана.

$$\Rightarrow 1 = \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} C_m^k$$

Доказательство формулы включений и исключений.

Возьмём произвольный элемент $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Покажем, что x учитывается правой частью формулы в точности один раз.

Предположим, что x принадлежит пересечению ровно m наших множеств; не ограничивая общности, можно считать, что x принадлежит множествам $A_1, \dots, A_m$ и не принадлежит множествам $A_{m+1}, \dots, A_n$. Тогда:

- в первой сумме $\sum |A_i|$ элемент x посчитан $m = C_m^1$ раз (в слагаемых $|A_1|, \dots, |A_m|$);
- во второй сумме $\sum |A_i \cap A_j|$ элемент x посчитан C_m^2 раз (ведь количество попарных пересечений $A_i \cap A_j$ для которых $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, равно C_m^2);
- в третьей сумме $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$ элемент x посчитан C_m^3 раз (ведь количество пересечений $A_i \cap A_j \cap A_k$ для которых $i, j, k \in \{1, 2, \dots, m\}$, равно C_m^3);

...

- в m -й сумме $\sum |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}|$ элемент x посчитан $1 = C_m^m$ раз (он войдёт только в слагаемое $|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m|$);

- суммы, содержащие $m+1$ и более пересечений, не учитывают элемент x , поскольку x не входит в пересечение более чем m множеств.

Таким образом, элемент x оказывается посчитанным $C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m+1} C_m^m$ раз.

Согласно лемме это выражение равно единице, что и требовалось. Формула тем самым доказана.

Теорема Стоуна. Всякая булева алгебра изоморфна подходящей алгебре множеств.

Иными словами, теорема Стоуна утверждает существование вложения любой булевой алгебры в некоторую алгебру множеств.

Без доказательства.

Среди 40 друзей Кати 23 друга любят малину, 22 — клубнику, а 21 — землянику. При этом и малину, и клубнику любит 12 друзей, и малину, и землянику — 9 друзей, а клубнику и землянику — 10 друзей. Сколько среди друзей Кати тех, кто любит все три ягоды, если известно, что каждый хоть какую-то из этих ягод любит?

Показать ответ и решение



Если сложить $23 + 22 + 21$, получится, что каждого однолюбца мы считаем один раз, каждого двулюбца — два раза, а каждого трилюбца — три раза. Если сложить $12 + 9 + 10$, то каждого двулюбца мы считаем один раз, а каждого трилюбца — три раза. Тогда после вычитания из первой суммы второй суммы, и однолюбы, и двулюбы посчитаны по разу, а трилюбы не посчитаны вообще. Значит, число $23 + 22 + 21 - 12 - 9 - 10 = 35$ отличается от 40 только количеством трилюбов. Тогда их 5.

Сколько чисел от 1 до 1000 делятся хотя бы на одно из чисел 2, 3, 5?

Показать ответ и решение



Нарисуем три круга Эйлера для трех множеств чисел: кратные 2, кратные 3, кратные 5. Чтобы вычислить количество чисел в объединении всех трех множеств, нужно посчитать количество чисел в каждом множестве отдельно, в их попарных пересечениях и в пересечении всех трех.

Чисел, кратных 2 ровно $1000/2 = 500$.

Чисел, кратных 3 ровно целая часть от $1000/3$, то есть 333.

Чисел, кратных 5 ровно $1000/5 = 200$.

Чисел, кратных 2 и 3 ровно целая часть от $1000/6$, то есть 166.

Чисел, кратных 2 и 5 ровно $1000/10 = 100$.

Чисел, кратных 3 и 5 ровно целая часть от $1000/15$, то есть 66.

Чисел, кратных 2, 3 и 5 ровно целая часть от $1000/30$, то есть 33.

Тогда ответ: $500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$.

Из 100 туристов, выехавших в заграничное путешествие, 10 человек не знают ни немецкого, ни французского языков, 76 человек знают немецкий и 83 — французский. Сколько туристов знают оба эти языка?

*Даны множества: $\{с, и, л, а\}$ и $\{л, и, с\}$. Найдите объединение множеств.
Даны множества: $\{с, и, л, а\}$ и $\{л, и, с\}$. Найдите пересечение множеств.*