

Лекция 2.

Метод математической индукции. Применение метода математической индукции при доказательстве утверждений. Бином Ньютона, неравенство Бернулли.

Доказательство по индукции наглядно может быть представлено в виде так называемого принципа домино. Пусть какое угодно число косточек домино выставлено в ряд таким образом, что каждая косточка, падая, обязательно опрокидывает следующую за ней косточку (в этом заключается индукционный переход). Тогда, если мы толкнем первую косточку (это база индукции), то все косточки в ряду упадут.

Другое образное представление можно описать следующим образом. Пусть мы умеем подходить к основанию лестницы (база индукции), а также умеем подниматься на одну ступеньку (индуктивный переход). Тогда мы можем подняться на любую ступеньку лестницы.

Математическая индукция — метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения, зависящего от натурального параметра (номера). Для этого сначала проверяется истинность утверждения с каким-то начальным номером (чаще всего с номером 1) — база (базис) индукции, а затем доказывается, что если верны утверждения с номерами от начального номера до номера n , то верно и очередное утверждение с номером $n + 1$ — шаг индукции, или переход индукции.

Сформулируем принцип математической индукции более формально, точно и строго.

Предположим, что требуется установить справедливость конечной или бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами: $P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}, \dots$ (для определенности считаем, что база индукции соответствует случаю $n = 1$).

Для этого достаточно сначала установить истинность утверждения P_1 (проверить базу индукции), а затем доказать, что для любого номера n если справедливы утверждения $P_1, P_2, \dots, P_n$, то будет верным и утверждение P_{n+1} (переход индукции). Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

Описанный выше шаг индукции часто называют «переходом от n к $n+1$ ». При этом стоит обратить внимание на то, что при «переходе от n к $n + 1$ » для доказательства очередного утверждения P_{n+1} можно опираться не только на утверждение P_n , но и на все утверждения с меньшими номерами.

Заметим также, что переход индукции («очередной шаг»), можно с таким же успехом описать и «переходом от $m - 1$ к m ».

Докажем с помощью этого принципа справедливость бинома Ньютона и неравенства Бернулли.

Теорема. (Бином Ньютона).

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}, \text{ где}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство.

1) База индукции:

$$n=1: (a+b)^1 = C_1^0 a^0 b^1 + C_1^1 a^1 b^0 = a+b - \text{верно}$$

2) Шаг индукции:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \Rightarrow (a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}$$

Д-во:

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n = (a+b) \cdot \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^n = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

Возьмем $m = k+1$. Тогда: $a^{k+1} b^{n-k} = a^m \cdot b^{n+1-m}$
 $\Downarrow$
 $k = m-1$.
 $a^k b^{n+1-k}$ $\Rightarrow$ одинак.
всг

Прод-е на сл. стр.

Группировка слагаемых с одинак.
буквенной частью: $a^p b^{n+1-p}$, $p = 1 \dots n+1$
Это:

а) $a \cdot C_n^{p-1} a^{p-1} \cdot b^{n-(p-1)}$

б) $b \cdot C_n^p a^p b^{n-p}$

Сложим коэф-ты:

$$C_n^{p-1} + C_n^p = \frac{n!}{(p-1)!(n+1-p)!} + \frac{n!}{p!(n-p)!} =$$

$$= \frac{n!(p+n+1-p)}{p!(n+1-p)!} = \frac{n!(n+1)}{p!(n+1-p)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{p!(n+1-p)!} = C_{n+1}^p$$

Следовательно:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}, \quad \underline{\text{т. м. г.}}$$

Устали? А коммент еще не закон-
чен  хп хп

Но кр-во Бернулли на с. странице

Теорема. Неравенство Бернулли

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq -1: (1+x)^n \geq 1+nx$$

Доказательство:

① База индукции:

$$n=1: (1+x)^1 \geq 1+1 \cdot x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+x \geq 1+x - \text{верно}$$

② Шаг индукции:

$$(1+x)^n \geq 1+nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Докажем:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx} \geq (1+x) \cdot (1+nx) =$$

$$= 1+x+nx + \underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x$$

$$\Downarrow \\ (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x, \text{ з.м.г.}$$

Примеры:

Сл. сл. слр.

№ 1.

Пример

Доказать, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Решение

Проверим, справедлива ли эта формула при $n=1$:

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} \Rightarrow 1 = 1$$

Это верно.

Предположим, что тождество верно при $n=k$, то есть

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Проверим, что тогда это тождество верно и при $k+1$:

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \\ + (k+1)^2 &= \frac{k \cdot (k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1) \cdot (2k^2 + k + 6k + 6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

Значит, тождество верно для любого n .

Пример

Доказать, что при каждом натуральном $n \geq 3$ существует выпуклый n -угольник, имеющий ровно три острых угла.

Решение

Для $n=3$ утверждение очевидно, так как подходит любой остроугольный треугольник. В качестве примера четырехугольника можно взять правильный треугольник, к одной из сторон которого основанием «приклеили» тупоугольный равнобедренный треугольник с углом при вершине меньше 120° .

Пусть есть такой k -угольник, $k \geq 4$. Возьмем один из его тупых углов и «отрежем» его, соединив середины образующих его сторон. Число вершин станет $k+1$. Новые два угла, появившиеся вместо старого, будут еще более тупые, так как они являются внешними углами «отрезанного» треугольника.

Докажите, что числа Фибоначчи

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \text{ где } n \geq 1$$

можно найти по формуле:

$$a_n = \frac{\varphi_1^n - \varphi_2^n}{\sqrt{5}},$$

где $\varphi_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ и $\varphi_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ – корни уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

Доказательство



Доказывать будем по индукции. Проверим базу индукции для a_1 и a_2 :

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_1,$$

$$\frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} - \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = a_2.$$

Теперь предположим, что мы доказали формулу для всех $k \leq n + 1$, где $n + 1 \geq 2$.

Докажем формулу для $k = n + 2$ (здесь во втором равенстве мы используем предположение индукции для a_n и a_{n+1}):

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1} = \frac{\varphi_1^n - \varphi_2^n}{\sqrt{5}} + \frac{\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi_1^n(1 + \varphi_1) - \varphi_2^n(1 + \varphi_2)}{\sqrt{5}}.$$

Т.к. φ_1 и φ_2 являются корнями уравнения $x^2 - x - 1 = 0$, то $1 + \varphi_1 = \varphi_1^2$ и $1 + \varphi_2 = \varphi_2^2$. Тогда мы получаем, что

$$a_{n+2} = \frac{\varphi_1^n(1 + \varphi_1) - \varphi_2^n(1 + \varphi_2)}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi_1^{n+2} - \varphi_2^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

Тем самым формула доказана для всех натуральных k .