

Лекция 4.

Вторая часть булевых функций: импликация, строгая дизъюнкция, эквивалентность. Оптимизация логических выражений.

Операция, выражаемая связками "если ..., то", "из ... следует", "... влечет ...", называется импликацией (лат. *implico* — тесно связаны) и обозначается знаком $\rightarrow$

Основное свойство: Высказывание $A \rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.

$$A \rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

A	B	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Операция, выражаемая связками "тогда и только тогда", "необходимо и достаточно", "... равносильно ...", называется эквиваленцией или двойной импликацией и обозначается знаком $\leftrightarrow$ или $\sim$.

Основное свойство: Высказывание $A \sim B$ истинно тогда и только тогда, когда $A = B$.

$$A \sim B = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$$

A	B	$A \sim B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операция, выражаемая связкой “либо то, либо это” называется строгой дизъюнкцией и обозначается знаком $\oplus$, XOR, $\triangleleft$.

Основное свойство: высказывание $A \oplus B$ верно тогда и только тогда, когда одно из утверждений истинно, а второе ложно.

$$A \oplus B = (A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)$$

A	B	A B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Оптимизация логических выражений.

Алгоритм:

- 1) заменить операции импликации, строгой дизъюнкции и эквивалентности на соответствующие выражения
- 2) воспользоваться законами Де-Моргана
- 3) воспользоваться основными теоремами алгебры логики и привести выражение к наиболее короткому виду

Примеры:

2.5. Составить таблицы истинности для следующих формул: 1) $x \& \bar{y}$,
2) $x \& y \vee z$, 3) $x \& \bar{y} \rightarrow (\bar{x} \vee y \rightarrow \bar{z})$, 4) $x \rightarrow \bar{y} \rightarrow \overline{x \vee y \& \bar{z}}$.

2.6. Установить, какие из следующих формул являются тождественно истинными, а какие – тождественно ложными:

- 1) $\bar{x} \rightarrow (x \rightarrow y)$,
- 2) $\overline{x \rightarrow (y \rightarrow x)}$,
- 3) $y \rightarrow x \rightarrow (\bar{x} \rightarrow \bar{y})$,
- 4) $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$,
- 5) $\overline{x \rightarrow z \rightarrow (y \rightarrow z \rightarrow (x \vee y \rightarrow z))}$, 6) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \rightarrow (x \rightarrow z))$.

3. Упростите логические выражения

1. $(A \& B) \rightarrow A$

2. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow B$

3. $(\bar{A} \rightarrow (A \vee B)) \rightarrow A$

4. $(A \& (B \vee \bar{A})) \& ((B \rightarrow \bar{A}) \vee B)$

5. $((A \& \bar{B}) \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

6. $(B \rightarrow C) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow (\bar{A} \vee C))$

7. $(A \vee (A \& \bar{B})) \rightarrow \overline{A \& B}$

8. $((\bar{A} \& (\overline{A \vee B})) \rightarrow \overline{A \& B})$

9. $(A \vee B) \& (\bar{A} \vee C) \rightarrow (C \vee \bar{B})$

10. $(\bar{A} \bar{A} \& B) \rightarrow (B \vee \bar{B} \& A)$

11. $(\overline{A \vee B}) \& (\overline{\bar{A} \vee B}) \rightarrow \overline{A \vee \bar{B}}$

12. $(\bar{A} \& (\overline{A \vee B})) \rightarrow \overline{A \& \bar{B}}$

Ответ:

1. 1

2. $\bar{A} \vee B$

3. $A \vee \bar{B}$

4. $A \& B$

5. 1

6. $\bar{A} \vee B \vee C$

7. $\bar{A} \vee \bar{B}$

8. 1

9. $\bar{B} \vee A \vee C$

10. 1

11. 1

12. 1