

Лекция 5.

Продолжение оптимизации логических выражений. Карты Карно.

Карты Карно - графический способ представления булевых функций с целью их удобной и наглядной ручной минимизации.

Является одним из эквивалентных способов описания или задания логических функций наряду с таблицей истинности или выражениями булевой алгебры. Преобразование карты Карно в таблицу истинности или в булеву формулу и обратно осуществляется элементарным алгоритмом.

Удобство и наглядность такого представления логической функции обусловлено тем, что логические термы, к которым могут быть применены операции попарного неполного склеивания и элементарного поглощения группируются в карте Карно в виде визуально очевидных прямоугольных массивов, содержащих в своих ячейках одинаковые значения (нули и единицы).

Как построить карту Карно?

Алгоритм:

1. Разметить оси карты. Вот правила:

- 1.1. Вертикальная ось размечается независимо от горизонтальной.
- 1.2. Начинать разметку можно с любого сочетания переменных.
- 1.3. Все сочетания переменных должны быть перечислены.
- 1.4. Для соседних клеток карты сочетание переменных должно отличаться не более чем одним знаком, причем соседними являются крайние клетки строки (столбца).

Для функции двух переменных карта Карно - прямоугольник 2×2 .

Для 3-х - прямоугольник 2×4 или 4×2 . Для 4-х – прямоугольник 4×4 .

Для 5-ти переменных это будет уже куб размерами $4 \times 4 \times 4$, так что для минимизации функций пяти и более переменных метод уже не используется.

2. Заполнить клетки карты значениями из таблицы истинности

3. Рассмотреть те клетки, которые содержат единицы, и обвести их в контур согласно следующим правилам:

3.1. Контур должен быть прямоугольным и содержать количество единиц, равное 2^n , где n – целое число. Таким образом, в контуре может быть либо одна, либо две, либо четыре, либо восемь единиц.

3.2. Количество единиц в контуре должно быть максимальным, при этом контуры могут пересекаться между собой. Нужно учитывать, что крайние строки являются соседними и крайние столбцы также

являются соседними, поэтому контуры могут быть «разорванными».

3.3. Количество контуров должно быть минимальным, но все единицы должны быть охвачены контурами. Нельзя забывать об отдельно стоящих единицах. Каждая такая единица – это контур, которому соответствует полное логическое произведение всех переменных.

4. Записать минимальное выражение как логическую сумму логических произведений. Каждому произведению соответствует один контур карты Карно. В произведение входят только те переменные, которые остаются в данном контуре неизменными. При этом переменная входит в произведение с инверсией, если ее значение в данном контуре равно 0, и без инверсии, если ее значение равно 1.

Примеры:

Для представленной таблицы истинности написать минимальное логическое выражение с использованием карты Карно.

a	b	c	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Решение:

		<u>bc</u>			
		11	10	00	01
a	0	1	1	0	0
	1	1	1	1	0

Два контура – два произведения

1 контур:

a - не меняется (0 и 1)
b - ~~не~~ меняется (равна 1)
c - меняется

2 контур:

a - ~~не~~ меняется (равна 1)
b - меняется
c - ~~не~~ меняется (равна 0)

$$F = b + a \wedge \bar{c}$$

Ответ:

$$F = b + a \wedge \bar{c}$$

Ещё пример:

3. Упростите логические выражения

1. $(A \& B) \rightarrow A$

2. $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow B$

3. $(\bar{A} \rightarrow (A \vee B)) \rightarrow A$

4. $(A \& (B \vee \bar{A})) \& ((B \rightarrow \bar{A}) \vee B)$

5. $((A \& \bar{B}) \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

6. $(B \rightarrow C) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow A) \rightarrow (\bar{B} \rightarrow (\bar{A} \vee C))$

7. $(A \vee (A \& \bar{B})) \rightarrow \overline{A \& B}$

8. $((\bar{A} \& \overline{A \vee B})) \rightarrow \overline{A \& B}$

9. $(A \vee B) \& (\bar{A} \vee C) \rightarrow (C \vee \bar{B})$

10. $(\bar{A} \bar{A} \& B) \rightarrow (B \vee \bar{B} \& A)$

11. $(\overline{A \vee B}) \& (\overline{\bar{A} \vee B}) \rightarrow \overline{A \vee \bar{B}}$

12. $(\bar{A} \& \overline{A \vee B}) \rightarrow \overline{A \& \bar{B}}$

Но теперь с помощью карт
Карно