

Лекция 5.

Числовая последовательность. Определение предела числовой последовательности по Коши. Сходимость и сумма n членов геометрической прогрессии.

Последовательностью называется числовая функция натурального аргумента. Если натуральному числу n при этом поставлено в соответствие число x_n , то это число называется n -м элементом последовательности; n называют номером элемента x_n .

Последовательность можно задать, выписав все её элементы

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Используется и краткая запись $\{x_n\}$.

Напомним известные свойства неравенств, связанных с абсолютными величинами.

Неравенство

$$|x| < a$$

равносильно двойному неравенству

$$-a < x < a.$$

Для любых двух действительных чисел x и y выполняются неравенства:

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$$

Модуль суммы нескольких чисел не превосходит суммы их модулей:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|.$$

Рассмотрим теперь понятие предела последовательности.

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного ε существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство

$$|a - x_n| < \varepsilon.$$

При этом пишут

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

или

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся. Поскольку неравенство

$$|a - x_n| < \varepsilon$$

эквивалентно неравенству

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon,$$

то все элементы сходящейся последовательности за исключением конечного их числа при любом $\varepsilon > 0$ лежат в ε -окрестности точки a .

Не всякая последовательность имеет предел.

Пусть, например, $x_n = n$. Ясно, что за пределами 1-окрестности $(a - 1, a + 1)$ любого числа a лежит бесконечно много элементов данной последовательности. Поэтому ни одно число не может служить её пределом, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не существует.

Теорема (о пределе постоянной).

Если $x_n = c$, $n = 1, 2, \dots$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Доказательство.

Пусть задано положительное ε . Возьмем $N = 1$. Тогда при $n > N$ имеем $|c - x_n| = |c - c| = 0 < \varepsilon$. В соответствии с определением предела получаем отсюда, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Теорема доказана.

Заметим, что в последней теореме на деле N от ε не зависит.

Теорема (о единственности предела).

Последовательность может иметь не более одного предела.

Доказательство.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет два предела:

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. Тогда для $\varepsilon = |a - b|/3 > 0$ найдется номер N_1 такой, что при всех $n > N_1$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon$; найдется также номер N_2 такой, что при всех $n > N_2$ выполняется неравенство $|b - x_n| < \varepsilon$.

Пусть $n > \max(N_1, N_2)$. Тогда $|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |a - x_n| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = 2|a - b|/3$, т.е. $|a - b| < 2|a - b|/3$ — противоречие. Теорема доказана.

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной снизу, если существует число c_1 такое, что $x_n > c_1$ при всех $n = 1, 2, \dots$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ограниченной сверху, если существует число c_2 такое, что $x_n < c_2$ при всех $n = 1, 2, \dots$

Последовательность, ограниченная как сверху, так и снизу, называется ограниченной. Пользуясь тем, что неравенство $|x_n| < c$ равносильно двойному неравенству $-c < x_n < c$, нетрудно проверить, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда последовательность $\{|x_n|\}$ ограничена сверху.

Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности).

Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство.

Пусть $\{x_n\}$ сходится, и пусть $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Тогда для положительного числа 1 существует номер N такой, что при $n > N$ выполняется неравенство $|a - x_n| < 1$. Отсюда

$$|x_n| - |a| \leq |a - x_n| < 1, \text{ т.е. } |x_n| < |a| + 1.$$

Следовательно,

$|x_n| < \max(|x_1|, \dots, |x_N|, |a| + 1)$, $n = 1, 2, \dots$, и последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

Теорема доказана.

Рассмотрим арифметические операции над последовательностями. Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Тогда можно составить последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$, $\{x_n / y_n\}$, называемые соответственно суммой, разностью, произведением и частным исходных последовательностей. В случае частного предполагается, что $\{y_n\}$ состоит из ненулевых чисел.

Теорема (о сумме и разности сходящихся последовательностей).

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

Доказательство.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда для положительного числа $\varepsilon/2$ существует номер N_1 такой, что при всех $n > N_1$ выполняется неравенство $|a - x_n| < \varepsilon/2$.

Аналогично существует номер N_2 такой, что при $n > N_2$ выполняется неравенство $|b - y_n| < \varepsilon/2$. При $n > \max(N_1, N_2)$ имеем

$$|(a \pm b) - (x_n \pm y_n)| = |(a - x_n) \pm (b - y_n)| \leq |a - x_n| + |b - y_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Отсюда по определению предела последовательности получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

Теорема доказана.

Теорема (о пределе произведения сходящихся последовательностей).

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$.

Доказательство.

Т.к. последовательность $\{x_n\}$ сходится, то эта последовательность ограничена. Следовательно, существует (неотрицательное) число c такое, что $|x_n| < c$ при всех $n = 1, 2, \dots$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то для положительного числа $\varepsilon/2(|b| + 1)$ существует номер N_1 такой, что при всех $n > N_1$ выполняется неравенство

$$|a - x_n| < \varepsilon/2(|b| + 1).$$

Для положительного числа $\varepsilon/2(c + 1)$ также найдется номер N_2 такой, что при всех $n > N_2$ справедливо неравенство

$$|b - y_n| < \varepsilon/2(c + 1)$$

— это следует из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Отсюда при $n > \max(N_1, N_2)$ получаем

$$|ab - x_n y_n| = |ab - bx_n + bx_n - x_n y_n| \leq |b| \cdot |a - x_n| + |x_n| \cdot |b - y_n| < |b| \cdot \varepsilon/2(|b| + 1) + c \cdot \varepsilon/2(c + 1) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

т.е. $|ab - x_n y_n| < \varepsilon$, если $n > \max(N_1, N_2)$. По определению предела это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$.

Теорема доказана.

Теорема (о пределе частного сходящихся последовательностей).

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, причем $b \neq 0$, а последовательность $\{y_n\}$ состоит из ненулевых чисел. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = a/b$.

Доказательство.

Если мы докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (1/y_n) = 1/b$, то рассматриваемая теорема станет следствием предыдущей. Заметим сначала, что для положительного числа $|b|/2$ найдется номер N_1 такой, что при всех $n > N_1$ выполняется неравенство $|b - y_n| < |b|/2$ — это следует из того, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Отсюда $|b| - |y_n| \leq |b - y_n| < |b|/2$.

Поэтому $|b| - |y_n| < |b|/2$, и $|y_n| > |b|/2$. Из последнего неравенства получаем, что $1/|y_n| < 2/|b|$ при всех $n > N_1$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда для положительного числа $\varepsilon = |b|^2/2$ существует номер N_2 такой, что при $n > N_2$ справедливо неравенство $|y_n - b| < \varepsilon|b|^2/2$.

При $n > \max(N_1, N_2)$ имеем тогда:

$$|1/b - 1/y_n| = |y_n - b|/(|b| \cdot |y_n|) < 2/|b|^2 \cdot \varepsilon|b|^2/2 = \varepsilon,$$

если $n > \max(N_1, N_2)$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/y_n = 1/b$, а отсюда, как отмечалось выше, вытекает справедливость теоремы. Теорема доказана.

Последовательность $\{x_n\}$ называется фундаментальной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при любых $m > N$ и $n > N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Следующая теорема является основной в теории пределов.

Теорема (Критерий Коши существования предела последовательности).

Для того, чтобы последовательность была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Поскольку в этой теореме идет речь об эквивалентности двух условий, то ее доказательство естественным образом распадается на две части: доказательство необходимости и доказательство достаточности.

Доказательство необходимости. Требуется доказать, что если последовательность сходится, то она фундаментальна. Пусть $\{x_n\}$ —

сходящаяся последовательность, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, и пусть задано $\varepsilon > 0$. Для положительного числа $\varepsilon/2$ найдется номер N такой, что при $m > N$ и $n > N$ выполняются неравенства

$$|a - x_m| < \varepsilon/2 \text{ и } |a - x_n| < \varepsilon/2.$$

Тогда

$$|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| \leq |x_m - a| + |a - x_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \text{ т.е. } |x_m - x_n| < \varepsilon, \text{ если } m > N \text{ и } n > N. \text{ Мы видим, что последовательность } \{x_n\}$$

фундаментальна. Необходимость доказана.

Доказательство достаточности.

Здесь требуется доказать, что если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, то у этой последовательности существует предел.

Докажем сначала, что $\{x_n\}$ ограничена. Для положительного числа 1 существует номер N такой, что при $m > N$ и $n > N$ выполняется неравенство $|x_m - x_n| < 1$. В частности, при $m = N$ отсюда следует, что при всех $n > N$ справедливо неравенство $|x_N - x_n| < 1$. Следовательно,

$$|x_n| - |x_N| \leq |x_N - x_n| < 1,$$

$$\text{и } |x_n| < |x_N| + 1.$$

Поэтому при всех $n = 1, 2, \dots$ имеем $|x_n| < \max(|x_1|, \dots, |x_N|, |x_N| + 1)$, и последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Поэтому все элементы этой последовательности принадлежат некоторому отрезку $[a_1, b_1]$. Разделим этот отрезок пополам и из двух образовавшихся отрезков $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$, и $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$

выберем тот, который содержит бесконечно много элементов рассматриваемой последовательности $\{x_n\}$. Обозначим выбранный отрезок $[a_2, b_2]$. Очевидно, $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$ и $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2$. Далее разделим $[a_2, b_2]$ пополам и из двух отрезков $[a_2, (a_2 + b_2)/2]$ и $[(a_2 + b_2)/2, b_2]$ выберем тот, который содержит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Вновь выбранный отрезок обозначим $[a_3, b_3]$. Очевидно, $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3]$, и $b_3 - a_3 = (b_2 - a_2)/2 = (b_1 - a_1)/4$.

Продолжая этот процесс выбора отрезков, получим последовательность вложенных отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

причём $b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$. По лемме о вложенных отрезках имеется точка c , принадлежащая всем построенным отрезкам. Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для этого ε подберем номер N так, чтобы при всех $m > N$ и $n > N$ выполнялось неравенство $|x_m - x_n| < \varepsilon/2$. Далее, выберем число k так, чтобы было $(b_1 - a_1)/2^{k-1} < \varepsilon/2$; это возможно, т.к. $\lim_{k \rightarrow \infty} ((b_1 - a_1)/2^{k-1}) = 0$.

Поскольку отрезок $[a_k, b_k]$ содержит (по построению) бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, то среди этих элементов найдется такой элемент x_{n_0} , для которого $n_0 > N$. Поэтому при $n > N$ имеем $|x_{n_0} - x_n| < \varepsilon/2$. Кроме того, т.к. $c \in [a_k, b_k]$, то $|c - x_{n_0}| < b_k - a_k = (b_1 - a_1)/2^{k-1} < \varepsilon/2$, т.е.

$|c - x_{n0}| < \varepsilon/2$. Поэтому при всех $n > N$ имеем
 $|c - x_n| = |c - x_{n0} + x_{n0} - x_n| \leq |c - x_{n0}| + |x_{n0} - x_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, т.е. $|c - x_n| < \varepsilon$, и последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число c . Достаточность доказана.

Теорема доказана.

Применяя общее определение монотонной функции к последовательности (а последовательность есть по определению (числовая) функция натурального аргумента), приходим к понятию монотонной последовательности. В качестве примера рассмотрим определение неубывающей последовательности: последовательность $\{x_n\}$ называется неубывающей, если $x_n < x_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$.

Теорема (о пределе монотонной последовательности). Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.

Доказательство.

Необходимость. Требуется доказать, что если монотонная последовательность сходится, то она ограничена. Мы знаем однако, что это утверждение справедливо и без предположения о монотонности последовательности (см. выше теорему об ограниченности сходящейся последовательности). Необходимость доказана.

Достаточность. Требуется доказать, что если монотонная последовательность ограничена, то она имеет предел. Рассмотрим это утверждение для неубывающей последовательности $\{x_n\}$. Ограниченность снизу здесь не имеет значения: всякая неубывающая последовательность ограничена снизу, например, числом x_1 . Важна ограниченность сверху. Поскольку непустое множество элементов последовательности ограничено сверху, то это множество имеет точную верхнюю грань M . Пусть задано $\varepsilon > 0$. Для точной верхней грани M выполнены, как известно, два условия:

- 1) $x_n < M$ для $n = 1, 2, \dots$;
- 2) существует элемент x_N последовательности $\{x_n\}$, для которого $x_N > M - \varepsilon$. Для элементов последовательности x_n , у которых $n > N$, неравенство $x_n > M - \varepsilon$ будет выполнено и подавно, т.к. данная последовательность не убывает, и $x_n > x_N$.

Таким образом, при всех $n > N$ имеем такое двойное неравенство:

$$M - \varepsilon < x_n < M.$$

Следовательно, $M - \varepsilon < x_n < M + \varepsilon$, что равносильно неравенству $|M - x_n| < \varepsilon$. Т.к. последнее неравенство выполняется при всех $n > N$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится (к числу M). Для неубывающей последовательности достаточность доказана; для невозрастающей последовательности доказательство аналогично. Достаточность доказана.

Теорема доказана

Вычислить пределы:

$$1.231. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{3n}. \quad 1.232. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+1}{7-9n}.$$

$$1.233. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^3}. \quad 1.234. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}.$$

$$1.235. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3-(n-2)^3}{95n^3+39n}.$$

2

$$1.236. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3} \right).$$

$$1.236. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{5n+7} - \frac{1+2n^3}{2+5n^3} \right).$$

$$1.237. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+3n+1}}{n-1}.$$

$$1.238. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}).$$

$$1.239. \lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/2} (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-2}). \quad 1.240. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}.$$

$$1.241. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$1.242. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}. \quad 1.243. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n^2)}{n-1}.$$

$$1.244. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right).$$

$$1.245. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{5^n} \right).$$

