

Лекция 6.

Определение предела числовой функции. Бесконечно малые и большие функции, их свойства и связь. Теорема о двух милиционерах.

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности точки x_0 . Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что если $0 < |x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Это — определение предела по Коши. Определение предела по Гейне выглядит так.

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$ точки x_0 . Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из $\mathring{U}(x_0)$, для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Эти определения эквивалентны, т.е. с их помощью вводится одно и то же понятие. * Чтобы убедиться в этом, требуется доказать два утверждения.

Пусть сначала a является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ в смысле определения по Коши. Проверим, что при этом будут также выполнены требования определения по Гейне. Пусть задана последовательность точек $\{x_n\}$, все элементы которой лежат в проколотой окрестности $\mathring{U}(x_0)$, и пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Если задано $\varepsilon > 0$, то в соответствии с определением предела по Коши найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in \mathring{U}(x_0)$, для которых $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, то найдется номер N такой, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|x_n - x_0| < \delta$, а тогда $|f(x_n) - a| < \varepsilon$. Таким образом, при $n \geq N$ выполняется неравенство $|f(x_n) - a| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$, и число a является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ в смысле определения по Гейне.

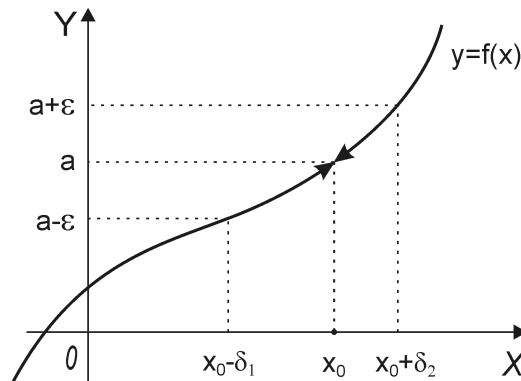
Предположим теперь, что a является пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ в смысле определения по Гейне. Доказательство того, что a будет также пределом в смысле определения по Коши удобнее провести методом от противного. Если требования определения по Коши не выполняются, то найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом положительном δ существует число $x \in \mathring{U}(x_0)$, для которого $|x - x_0| < \delta$, однако $|f(x) - a| \geq \varepsilon_0$. Зафиксировав такое ε_0 , при каждом $n = 1, 2, \dots$ подберем такое $x_n \in \mathring{U}(x_0)$, что $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, и при этом $|f(x_n) - a| \geq \varepsilon_0$. Из последнего неравенства следует, что a не является пределом последовательности $\{f(x_n)\}$ при $n \rightarrow \infty$. Чтобы доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ заметим, что для любого положительного числа ε при некотором натуральном N выполняется неравенство $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Ясно, что тогда при любом $n \geq N$

выполняется также неравенство $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, т.е. $|x_n - x_0| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Таким образом, $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, и в то же время $\{f(x_n)\}$ не стремится к a при $n \rightarrow \infty$. Полученное противоречие означает, что доказываемое утверждение справедливо. Эквивалентность двух определений предела доказана. *

Если a есть предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то пишут $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, или $f(x) \rightarrow a$ при $x \rightarrow x_0$. По ходу доказательства эквивалентности двух определений предела мы воспользовались тем, что для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon_0 > 0$ найдется натуральное N такое, что $\frac{1}{N} < \varepsilon_0$, т.е. $N > \frac{1}{\varepsilon_0}$. Справедливость этого утверждения следует из аксиомы Архимеда: для любого вещественного числа существует превосходящее его натуральное число. * Опираясь на существование точной верхней грани у всякого непустого ограниченного сверху множества действительных чисел, можно доказать аксиому Архимеда. В самом деле, пусть существует действительное число E такое, что $n \leq E$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (здесь E – заглавная греческая буква эпсилон; эту букву часто используют для обозначения «сколь угодно большого числа», в отличие от буквы ε , служащей для обозначения «сколь угодно малого числа» (например, в определении предела)). Тогда $\mathbb{N}$ — непустое ограниченное сверху подмножество $\mathbb{R}$. Следовательно, у этого множества существует точная верхняя грань n_0 . Для числа n_0 выполнены два условия:

- 1) для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $n \leq n_0$;
- 2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > n_0 - \varepsilon$.

Взяв $\varepsilon = 1$, получим, что $n > n_0 - 1$, т.е. $n + 1 > n_0$, а т.к. $n + 1$ — натуральное число, то мы получаем противоречие с первым условием. Таким образом, точная верхняя грань n_0 не существует, и множество $\mathbb{N}$ не является ограниченным сверху, т.е. аксиома Архимеда справедлива. *



На рисунке показана геометрическая иллюстрация предела: чтобы по заданному $\varepsilon > 0$ подобрать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, о котором говорится в определении предела (по Коши), достаточно взять минимальное из чисел δ_1 и δ_2 .

Рассмотрим теперь функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки $+\infty$, т.е. на интервале $(x_0, +\infty)$. Число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число E (не меньшее x_0) такое, что при всех $x > E$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Это — определение по Коши. Можно сформулировать и определение по Гейне: число a называется пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для всякой последовательности точек $\{x_n\}$ интервала $(x_0, +\infty)$ из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ вытекает равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$. Эти определения эквивалентны; доказательство проводится так же, как и в случае $x \rightarrow x_0$. Обозначение: $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, или $f(x) \rightarrow a$ при $x \rightarrow +\infty$.

Следует отметить, что в теории последовательностей мы не рассматривали ситуацию

из последнего определения, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ имеет пределом $+\infty$, если для любого числа E существует номер N такой, что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $x_n > E$. Аналогично определяются пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Надо только в последнем определении неравенство $x_n > E$ заменить соответственно на $x_n < E$ и $|x_n| > E$.

Эти определения без труда переносятся на случай функций. Запись $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ для функции, определенной в проколотой окрестности точки x_0 , означает, что для любого E найдется положительное число δ такое, что если $0 < |x - x_0| < \delta$, то $f(x) > E$. Если последнее неравенство заменить соответственно на $f(x) < E$ или $|f(x)| > E$, то получим определения того, что $f(x) \rightarrow -\infty$ или $f(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow x_0$.

Рассмотрим теорему о единственности предела функции.

Теорема (о единственности предела функции). Функция $f(x)$, определенная в проколотой окрестности точки x_0 , может иметь не более одного предела при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Пусть $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, причем $a \neq b$. Для положительного числа $\varepsilon = \frac{|a - b|}{2}$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta_1$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, и число $\delta_2 > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Если $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, то при $0 < |x - x_0| < \delta$ имеем $|a - b| = |(a - f(x)) + (f(x) - b)| \leq |a - f(x)| + |f(x) - b| < 2\varepsilon = |a - b|$, т.е. $|a - b| < |a - b|$ — противоречие. Теорема доказана.

Теорема (о локальной ограниченности функции, имеющей предел). Для функции $f(x)$, имеющей (конечный) предел при $x \rightarrow x_0$ существует проколотая окрестность этой точки, на которой данная функция ограничена.

Доказательство. Пусть $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Тогда для положительного числа 1 найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < 1$. Отсюда

$$|f(x)| = |f(x) - a + a| \leq |f(x) - a| + |a| < 1 + |a|, \text{ т.е. } |f(x)| < 1 + |a|,$$

и мы видим, что $f(x)$ ограничена в проколотой δ -окрестности $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ точки x_0 . Теорема доказана.

Теорема (о сохранении функцией знака своего предела). Пусть предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ положителен. Тогда функция $f(x)$ положительна в некоторой проколотой окрестности точки x_0 .

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $a > 0$. Тогда для положительного числа $\frac{a}{2}$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - a| < \frac{a}{2}$. Это неравенство равносильно такому: $-\frac{a}{2} < f(x) - a < \frac{a}{2}$; следовательно, $f(x) > \frac{a}{2}$, т.е. данная функция положительна при $x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$. Теорема доказана.

Переформулированные соответствующим образом последние три теоремы остаются в силе и для других рассмотренных выше предельных процессов.

Теорема (о предельном переходе в неравенстве). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ точки x_0 , причем для любого $x \in \dot{U}(x_0)$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$. Тогда, если эти функции имеют пределы $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $b = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то $a \geq b$.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы $a < b$, и пусть $\varepsilon = \frac{b - a}{2} > 0$. Тогда существует $\delta_1 > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta_1$ имеет место не-

равенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, т.е. $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$. Аналогично существует $\delta_2 > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|g(x) - b| < \varepsilon$, т.е. $b - \varepsilon < g(x) < b + \varepsilon$. Если $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, и $0 < |x - x_0| < \delta$, то $f(x) < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < g(x)$, т.е. $f(x) < g(x)$ для указанных значений x — противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Если в условии теоремы неравенство $f(x) \geq g(x)$ заменить на строгое, т.е. если $f(x) > g(x)$, то отсюда, вообще говоря, не следует, что $a > b$. Например, при $|x| < 1$, $x \neq 0$, имеем $|x| > x^2$. В то же время $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$.

Теорема (о пределе промежуточной функции). Пусть для всех x из некоторой проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ точки x_0 выполняется двойное неравенство $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, и пусть существуют пределы $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$, равные одному и тому же числу a . Тогда и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$.

Доказательство. Для произвольного положительного числа ε существуют положительные числа δ_1 и δ_2 такие, что при $0 < |x - x_0| < \delta_1$ имеет место неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$, т.е. $a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$, а при $0 < |x - x_0| < \delta_2$ выполняется неравенство $|h(x) - a| < \varepsilon$, т.е. $a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon$. Тогда при $0 < |x - x_0| < \delta$, $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, выполняется неравенство $a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < a + \varepsilon$, т.е. $a - \varepsilon < g(x) < a + \varepsilon$, и $|g(x) - a| < \varepsilon$. Таким образом, при $0 < |x - x_0| < \delta$ имеет место неравенство $|g(x) - a| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a$. Теорема доказана.

Заметим, что аналоги доказанных теорем справедливы и для других рассмотренных выше предельных процессов (в том числе и в теории последовательностей).

Задача:

Используя логическую символику, записать следующие утверждения:

$$1.264. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty. \quad 1.265. \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty.$$

$$1.266. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0. \quad 1.267. \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$1.268. \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0. \quad 1.269. \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2.$$

$$1.270. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty. \quad 1.271. \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty.$$

Вычислить пределы следующих рациональных выражений:

$$1.272. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2}{3x^2 - 5x + 1}. \quad 1.273. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3}{x^2 - 3}.$$

$$1.274. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{|x + 3|}. \quad 1.275. \lim_{x \rightarrow \sqrt{-2}} \frac{x^2 - 2}{x^4 + x^2 + 1}.$$

$$1.276. \lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \left(\frac{1}{2-x} - \frac{3}{8-x^3} \right). \quad 1.277. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}.$$

$$1.278. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}; m, n \in \mathbb{N}. \quad 1.279. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}.$$

$$1.280. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}. \quad 1.281. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}.$$

$$1.282. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right). \quad 1.283. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 5x}{x^2 - 3x + 1}.$$

$$1.284. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^5 + (x+2)^5 + \dots + (x+n)^5}{x^5 + n^5}, n \in \mathbb{N}.$$