

Лекция 7, часть первая.

Бесконечно малые и большие функции. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций. Связь бесконечно большой и малой функции.

Теория выведу

$$\begin{aligned}
 1.305. \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} \pi x. \quad 1.306. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{arcsin} x}{4x}. \\
 1.307. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}. \quad 1.308. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}, \quad \alpha \neq \beta. \\
 1.309. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x \right). \quad 1.310. \lim_{x \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2\alpha} \sin \frac{x - \alpha}{2}. \\
 1.311. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\pi - 4x}. \quad 1.312. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x. \\
 1.313. \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{\sin \alpha^n}{\sin^m \alpha}, \quad n, m \in \mathbb{Z}. \\
 1.314. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin 2\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha}{\alpha^3}. \\
 1.315. \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}. \quad 1.316. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos 5x}{1 - \cos 4x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1.320. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1}. \quad 1.321. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-5} \right)^{x^2}. \\
 1.322. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}. \quad 1.323. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{x})^{3/x}. \\
 1.324. \lim_{x \rightarrow \infty} x (\ln(2+x) - \ln x). \quad 1.325. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \\
 1.326. \lim_{x \rightarrow \infty} x (a^{1/x} - 1). \quad 1.327. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a^x - a}{x - 1}. \\
 1.328. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\log_a x - 1}{x - a}. \quad 1.329. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}. \\
 1.330. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\sin x}. \quad 1.331. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}.
 \end{aligned}$$

$\sin x$

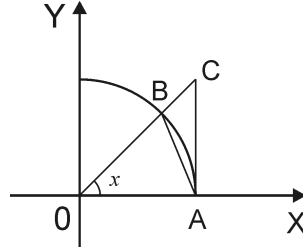
Теорема (о первом замечательном пределе).

Имеет место равенство

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство. Т.к. функция $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ является чётной, то достаточно доказать ра-

венство $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$.



Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат, пересекающую ось абсцисс в точке A , и пусть угол AOB равен x (радиан). Пусть, далее, CA — перпендикуляр к этой оси, C — точка пересечения с этим перпендикуляром продолжения отрезка OB за точку B . Тогда площадь $\triangle OAB$ меньше площади сектора OAB , а площадь этого сектора меньше площади $\triangle OAC$, т.е.

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x, \text{ и} \\ \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (1)$$

Чтобы можно было применить теорему о пределе промежуточной функции, достаточно доказать, что $\cos x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0+$. Т.к. $0 < \sin x < x$ и $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (это следует из доказанного; на деле неравенство верно при всех $x > 0$), то $\sin x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0+$. Отсюда следует, что $\sin^2 \frac{x}{2} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0+$, а поскольку $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$, то $\cos x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0+$. Поэтому из (1) вытекает требуемое. Теорема доказана.

Теорема (о втором замечательном пределе).

Справедливо равенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Доказательство. Требуется доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (2)$$

Рассмотрим первое из этих равенств. Имеем $[x] \leq x < [x] + 1$, где $[x]$ — целая часть x . При $x > 1$ (при этом $[x] > 0$) получаем отсюда:

$$1 + \frac{1}{[x]} \geq 1 + \frac{1}{x} > 1 + \frac{1}{[x] + 1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]}. \quad (3)$$

Т.к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

Следствия:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = 1$

Доказательство следствий

[скрыть]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \left[\begin{array}{l} u = \arcsin x \\ x = \sin u \\ u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \\ x = \operatorname{tg} u \\ u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = 1^2 = 1$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций ($x \rightarrow 0$)

$$\sin x \sim x$$

$$\operatorname{tg} x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\ln(1+x) \sim x$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$(1+x)^n - 1 \sim nx$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a$$

$$\sqrt[m]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{m}$$

$$e^x - 1 \sim x$$

Следствия

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = 1 \text{ для } a > 0, a \neq 1$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = 1$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{k}{x}\right)^x = e^{-k}$$

Доказательства следствий

[\[скрыть\]](#)

$$1. \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \left[\begin{array}{l} u = 1/x \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = \left[\begin{array}{l} u = x/k \\ x = ku \\ u \rightarrow \infty \\ x \rightarrow \infty \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{ku} = \left(\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u \right)^k = e^k$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln((1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\begin{array}{l} u = e^x - 1 \\ x = \ln(1+u) \\ x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = 1$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x \ln a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\ln(a^x)} - 1}{x \ln a} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} = \left[\begin{array}{l} u = x \ln a \\ u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot 1 = \left[\begin{array}{l} u = \alpha \ln(1+x) \\ x \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0 \end{array} \right] = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$$

кафедра «Математическое моделирование»
проф. П. Л. Иванов
Математический анализ

Лекция 7.

Бесконечно малые функции. Связь функции, ее предела и бесконечно малой. Свойства бесконечно малых функций. Бесконечно большие функции, их связь с бесконечно малыми.

ОЛ-1 п. 7.6

Функция $\varphi(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$.

Теорема (о связи функции, ее предела и бесконечно малой). Равенство $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ имеет место тогда и только тогда, когда $f(x) = a + \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$. Требуется доказать, что $f(x) = a + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$. Обозначим $\varphi(x) = f(x) - a$. Тогда из определения предела функции получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x , $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - a| = |\varphi(x)| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$, т.е. $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $f(x) = a + \varphi(x)$, где функция $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x , $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \varepsilon$, а т.к. $\varphi(x) = f(x) - a$, то также и неравенство $|f(x) - a| < \varepsilon$. Отсюда следует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Рассмотрим свойства бесконечно малых функций.

Теорема (о сумме бесконечно малых). Пусть функции $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ бесконечно малы при $x \rightarrow x_0$. Тогда их алгебраическая сумма $\sum_{i=1}^n \pm \varphi_i(x)$ также бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать теорему для $n = 2$, т.е. доказать, что бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$ является функция $\pm \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)$. Пусть задано $\varepsilon > 0$; из того, что $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ бесконечно малы при $x \rightarrow x_0$ получаем, что существует число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x , $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|\varphi_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$; существует также число $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех

x , $0 < |x - x_0| < \delta_2$, выполняется неравенство $|\varphi_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, то при всех x , $0 < |x - x_0| < \delta$, имеем

$$|\pm \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)| \leq |\varphi_1(x)| + |\varphi_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отсюда $\lim_{x \rightarrow x_0} (\pm \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)) = 0$, т.е. функция $\pm \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x)$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$, и теорема доказана.

Теорема (о произведении бесконечно малой величины на ограниченную). Пусть в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ точки x_0 заданы функции $f(x)$ и $\varphi(x)$, причем $f(x)$ ограничена на $\dot{U}(x_0)$, а $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$. Тогда произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. Т.к. $f(x)$ ограничена на множестве $\dot{U}(x_0)$, то существует число c такое, что $|f(x)| \leq c$ при всех $x \in \dot{U}(x_0)$. Далее, пусть задано $\varepsilon > 0$. Для положительного числа $\frac{\varepsilon}{c+1}$ (т.к. $c \geq 0$, то $c+1 \neq 0$) существует $\delta > 0$ такое, что при всех x , $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{c+1}$. Для указанных x имеем $|f(x) \cdot \varphi(x)| \leq c \cdot \frac{\varepsilon}{c+1} < \varepsilon$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \varphi(x) = 0$, и функция $f(x) \cdot \varphi(x)$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$. Теорема доказана.

* *Замечание.* В качестве примера на применение теоремы о связи функции, ее предела и бесконечно малой дадим другое доказательство утверждения о пределе частного двух функций. Поскольку $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$, то $f(x) = a + \varphi(x)$ и $g(x) = b + \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$. При этом $b \neq 0$, и $g(x) = b + \psi(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки x_0 . Чтобы доказать равенство $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ достаточно убедиться в том, что разность $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b}$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$. Имеем

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b} = \frac{a + \varphi(x)}{b + \psi(x)} - \frac{a}{b} = \frac{b\varphi(x) - a\psi(x)}{b(b + \psi(x))}.$$

Из теорем о произведении бесконечно малой величины на ограниченную и о сумме бесконечно малых следует, что функция, находящаяся в числителе последней дроби бесконечно мала (при $x \rightarrow x_0$). Далее, $\lim_{x \rightarrow x_0} b(b + \psi(x)) = b^2$ — это следует из упомянутой выше теоремы о связи функции, её предела и бесконечно малой. Поэтому для положительного числа $\frac{b^2}{2}$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|b(b + \psi(x)) - b^2| < \frac{b^2}{2}, \text{ т.е. } -\frac{b^2}{2} < b(b + \psi(x)) - b^2 < \frac{b^2}{2}.$$

Отсюда $b(b + \psi(x)) > \frac{b^2}{2}$, и $0 < \frac{1}{b(b + \psi(x))} < \frac{2}{b^2}$.

Мы видим, что при $0 < |x - x_0| < \delta$ функция $\frac{1}{b(b + \psi(x))}$ ограничена. Следовательно, $\frac{b\varphi(x) - a\psi(x)}{b(b + \psi(x))}$ есть произведение бесконечно малой (находящейся в числителе) на ограниченную функцию. Поэтому разность $\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{a}{b}$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$, и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$. Требуемое утверждение доказано.*

Функция $f(x)$, определённая в некоторой проколотой окрестности точки x_0 , называется бесконечно большой при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$. Аналогично определяются бесконечно большие функции и при других предельных переходах.

Теорема (о связи между бесконечно большой и бесконечно малой). Пусть функция $\varphi(x)$ отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки x_0 . Эта функция бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда функция $f(x) = \frac{1}{\varphi(x)}$ является бесконечно большой (при $x \rightarrow x_0$).

Доказательство. Необходимость. Пусть $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$, и пусть задано (сколь угодно большое) положительное число E . Возьмём столь малое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon < \frac{1}{E}$; тогда $\frac{1}{\varepsilon} > E$. Т.к. $\varphi(x)$ бесконечно мала при $x \rightarrow x_0$, то существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x , $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|\varphi(x)| < \varepsilon$. По условию теоремы $\varphi(x)$ отлична от нуля в проколотой окрестности точки x_0 ; отсюда $|f(x)| = \left| \frac{1}{\varphi(x)} \right| > \frac{1}{\varepsilon} > E$, т.е. $|f(x)| > E$. Поэтому $|f(x)| \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow x_0$, и $f(x)$ является бесконечно большой при указанном предельном переходе. Необходимость доказана. *Достаточность* доказывается аналогично. Теорема доказана.