

Лекция 7, часть вторая.

Непрерывность числовой функции в точке. Обратная функция для монотонной на промежутке функции. Локальные свойства функции, непрерывной в точке. Точки разрыва функции.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$, и пусть на X задана числовая функция $f(x)$. Эта функция называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x , $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Если x_0 — изолированная точка множества X (т.е. у этой точки имеется окрестность, не содержащая точек множества X , отличных от x_0), то в соответствии с этим определением функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 . Например, последовательность $\{x_n\}$, являющаяся, как известно, функцией натурального аргумента, непрерывна в каждой точке области своего определения (здесь для произвольного $\varepsilon > 0$ можно взять $\delta = 1/2$). Такая «непрерывность» интереса не представляет. Мы будем, в основном, применять понятие непрерывности к функциям, заданным на промежутках. Пусть I — промежуток, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, и пусть $x_0 \in I$, причём x_0 является внутренней точкой этого промежутка. Очевидно, непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 означает, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Это равенство в рассматриваемом случае можно принять за определение непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 . Рассмотрим другой подход к определению непрерывности функции. Пусть снова x_0 — внутренняя точка промежутка I , на котором задана числовая функция $f(x)$. Если $x_0 \in I$, то приращением аргумента называют разность $\Delta x = x - x_0$; соответствующим приращением функции называют $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Нетрудно проверить, что для непрерывности функции $f(x)$ при $x = x_0$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0. \quad (1)$$

В самом деле, если функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех x , $|x - x_0| < \delta$, т.е. при $|\Delta x| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $|\Delta f(x)| < \varepsilon$. Это означает выполнение соотношения (1). Таким образом, условие (1) необходимо для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 . Если же выполнено условие (1), то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое,

что при всех $|\Delta x| < \delta$, т.е. при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|\Delta f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, и по определению функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 . Мы видим, что условие (1) не только необходимо, но и достаточно для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 .

Можно дать определение непрерывности функции, основанное на определении предела функции по Гейне. Пусть, как и выше, функция $f(x)$ определена на промежутке I числовой прямой, и пусть x_0 – внутренняя точка этого промежутка. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 , если для любой последовательности точек $\{x_n\}$ промежутка I , для которой $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, выполняется равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$. Рассмотрим некоторые теоремы о локальных (т.е. определяемых поведением функции в сколь угодно малой окрестности соответствующей точки) свойствах непрерывных функций.

Теорема (о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций).

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и непрерывны в этой точке. Тогда в точке x_0 непрерывны функции $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$; последнее — при условии, что $g(x)$ отлична от нуля в указанной окрестности точки x_0 .

Доказательство вытекает из свойств пределов и определения непрерывной функции. Например, для частного рассматриваемых функций имеем на основании теоремы о пределе частного:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

Отсюда непосредственно вытекает непрерывность функции $f(x)/g(x)$ в точке x_0 . Остальные утверждения теоремы проверяются аналогично. Теорема доказана.

Теорема (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и принимает значения в окрестности $V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$, и пусть на $V(y_0)$ определена функция $g(y)$. Тогда, если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , а $g(y)$ непрерывна в точке y_0 , то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Доказательство проведём с помощью теоремы о пределе сложной функции (с учётом сделанного там замечания). В силу непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 имеем $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$, а при $y \rightarrow y_0$ имеем $g(y) \rightarrow g(y_0)$. Поэтому $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) = g(f(x_0))$, т.е. $g(f(x))$ непрерывна при $x = x_0$. При этом требование $f(x) \neq y_0$ в проколотой окрестности точки x_0 здесь можно отбросить, т.к. $g(y)$ определена при $y = y_0$, и $g(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} g(y)$. Теорема доказана.

Теорема (о сохранении знака непрерывной функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , и $f(x_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет знак числа $f(x_0)$.

Доказательство. Пусть для определённости $f(x_0) > 0$. Тогда, т.к. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, по теореме о сохранении функцией знака своего предела неравенство $f(x) > 0$ будет выполняться также и в некоторой окрестности точки x_0 . Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о непрерывности элементарных функций. Заметим сначала, что константа $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, непрерывна в каждой точке x_0 . В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ возьмём $\delta = 1$. Тогда, если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$, и исследуемая функция непрерывна. Очевидна также непрерывность функции $f(x) = x$; здесь для $\varepsilon > 0$ берём $\delta = \varepsilon$. Тогда, если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$. Заметим, что доказанная непрерывность рассмотренных функций равносильна равенствам

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0. \quad (1)$$

Теперь мы можем доказать непрерывность многочлена $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ в любой точке x_0 , пользуясь теоремой о пределе суммы и произведения и равенством (1). Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_n x^n + \dots + a_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{s=0}^n a_s x^s = \sum_{s=0}^n a_s (\lim_{x \rightarrow x_0} x)^s = \\ &= \sum_{s=0}^n a_s x_0^s = f(x_0), \end{aligned}$$

т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, и непрерывность многочлена в произвольной точке x_0 доказана.

Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Предварительно докажем неравенство

$$|\sin x| \leq |x|, \quad (2)$$

которое справедливо при всех x . По ходу доказательства теоремы о первом замечательном пределе было доказано неравенство $\sin x < x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. При $|x| \geq \frac{\pi}{2}$ такое неравенство также справедливо, т.к. $|\sin x| \leq 1$, и $\frac{\pi}{2} > 1$. При $x = 0$ неравенство (1), очевидно справедливо. Осталось рассмотреть случай $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. В этом случае (2) запишется так: $-\sin x \leq -x$ или $\sin(-x) \leq -x$. Последнее неравенство справедливо, т.к. $-x > 0$. Таким образом, (2) доказано. Теперь можно доказать непрерывность синуса в любой точке x_0 . Имеем

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|, \text{ т.е. } |\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0|. \end{aligned}$$

Если задано $\varepsilon > 0$, то, взяв $\delta = \varepsilon$, получим, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|\sin x - \sin x_0| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$, и непрерывность функции $f(x) = \sin x$ доказана в произвольной точке x_0 .

Можно доказать также и непрерывность остальных основных элементарных функций (показательной, степенной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических) в каждой точке их области определения. Затем с помощью теорем о непрерывности сложной функции и о непрерывности суммы произведения и частного можно получить такой результат: любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена. В силу этого рассмотренные ранее функции $y = \operatorname{sign} x$ и $y = [x]$ не являются элементарными; функция $y = |x|$ элементарна, т.к. $|x| = \sqrt{x^2}$.

Пусть функция $f(x)$ определена на правосторонней окрестности $[x_0, x_0 + \eta)$, $\eta > 0$, точки x_0 . Это функция называется непрерывной справа в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0)$. Ана-

логично можно определить непрерывность слева: функция $f(x)$ должна быть определена на левосторонней окрестности $(x_0 - \eta, x_0]$, $\eta > 0$, точки x_0 , и должно выполняться равенство

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0).$$

Заметим, что оба эти определения эквивалентны данному выше определению непрерывности функции, заданной на произвольном множестве $X \subset \mathbb{R}$. Если I — промежуток числовой прямой, и $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, то функция $f(x)$ называется непрерывной на I , если эта функция непрерывна в каждой точке промежутка I . При этом непрерывность на левом конце промежутка (если он принадлежит I) понимается как непрерывность справа; непрерывность на правом конце (если он принадлежит I) понимается как непрерывность слева. В частности, можно говорить о функциях, непрерывных на отрезке.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 или в проколотой окрестности этой точки. Если данная функция не является непрерывной в точке x_0 , то

x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$. Говорят также, что функция $f(x)$ терпит разрыв этой точке. Если x_0 — точка разрыва функции $f(x)$, и существуют конечные пределы $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = f(x_0 - 0)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0 + 0)$, то x_0 называется **точкой разрыва первого рода**. Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется **скачком** функции $f(x)$ в точке x_0 . Во всех прочих случаях говорят о **разрыве второго рода**. Если x_0 — точка разрыва первого рода, и если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, то такой разрыв называют устранимым. Доопределив функцию $f(x)$ в точке устранимого разрыва x_0 (или изменив ее значение в этой точке, если функция в ней определена), полагая $f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, получим новую функцию, которая будет непрерывна в точке x_0 .

Примеры. 1. Пусть $f(x) = \operatorname{sign} x$; здесь $\lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{sign} x = -1$, $\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{sign} x = 1$. В нуле разрыв первого рода; скачок $f(0+) - f(0-) = 2$.

2. Если $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, то при $x = 0$ имеем устранимый разрыв. Доопределённая при $x = 0$ функция

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

уже непрерывна при $x = 0$.

3. Функции $f(x) = \frac{1}{x}$ и $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ имеют в точке $x = 0$ разрыв второго рода. Для первой из них $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, а для второй $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не существует. В самом деле, последовательности $x_n = \frac{1}{\pi n}$ и $x'_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ обе стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$, однако

$$\sin \frac{1}{x_n} \rightarrow 0, \text{ а } \sin \frac{1}{x'_n} \rightarrow 1.$$

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (быть может, односторонней). Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty$ или $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty$. Если $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, то расстояние $|x - x_0|$ от точки $M(x, f(x))$ до прямой $x = x_0$ стремится к нулю, если точка M стремится к бесконечности вдоль графика функции $y = f(x)$ (с соответствующей стороны).

Примеры. Ось ординат является вертикальной асимптотой графиков функций $y = \frac{1}{x}$, $y = \log_a x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Для графика последней функции вертикальными асимптотами являются также прямые $x = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$.

Математический анализ

Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, прохождение через любое промежуточное значение. Теорема о непрерывности обратной функции. Асимптоты графика функции.

Рассмотрим теоремы о свойствах функций непрерывных на отрезке. **Теорема**

(*Больцано-Коши*). Если функция определена и непрерывна на некотором отрезке и на его концах принимает значения разных знаков, то эта функция обращается в нуль хотя бы в одной точке данного отрезка.

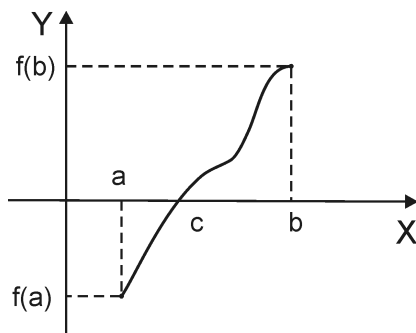
* *Доказательство*. Пусть $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$; функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков. Предположим для определенности, что $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Множество X точек отрезка $[a, b]$, в которых $f(x) < 0$ не пусто и ограничено сверху, поэтому существует точная верхняя грань этого множества: $c = \sup X$. Заметим сначала, что $c \in [a, b]$. Если это не так, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $c - \varepsilon > b$, а тогда на интервале $(c, c - \varepsilon)$ нет точек множества X , что противоречит определению точной верхней грани. На самом деле c является внутренней точкой отрезка $[a, b]$. Действительно, $f(x)$, будучи непрерывной в точках a и b , сохраняет знаки чисел $f(a)$ и $f(b)$ соответственно на полуинтервалах $[a, a + \eta)$ и $(b - \eta, b]$, где η — некоторое положительное число. Поэтому предположение $c = a$ противоречит тому, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leq c$. Если же $c = b$, то полуинтервал $(b - \eta, b]$ должен содержать точки множества X , чего на деле нет. Поэтому $a < c < b$. В точке c должно выполняться одно (и только одно) из соотношений:

$$f(c) < 0, \quad f(c) > 0, \quad f(c) = 0. \quad (3)$$

пусть $f(c) < 0$. Тогда найдётся положительное число η такое, что для любого $x \in (c - \eta, c + \eta)$ выполняется неравенство $f(x) < 0$ (это следует из непрерывности функции $f(x)$ в точке c). Отсюда получаем, что в множестве X есть точки, лежащие на отрезке $[a, b]$ правее точки c , что невозможно, т.к. c есть точная верхняя грань множества X . Не может выполняться и неравенство $f(c) > 0$, т.к. в этом случае, как и выше, найдётся окрестность $(c - \eta, c + \eta)$, $\eta > 0$, в каждой точке которой $f(x)$ положительна. Это также противоречит тому, что $c = \sup X$, т.к. должны существовать точки множества X , лежащие на интервале $(c - \eta, c)$. Таким образом, первые два из соотношений (3) не выполняются, и $f(c) = 0$. Существование требуемой точки установлено. **Теорема доказана.**

*

Теорема Больцано-Коши имеет простой геометрический смысл: точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ лежат по разные стороны от оси абсцисс, а при вычерчивании графика непрерывной функции $f(x)$ мы соединяем эти точки, «не отрывая карандаша от бумаги». Ясно, что при этом придётся пересечь отрезок $[a, b]$ в некоторой точке c , в которой $f(c) = 0$.



Следствие (теорема о промежуточном значении). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, и если $f(a) = A$, $f(b) = B$, то эта функция принимает все значения, лежащие на отрезке с концами в точках A и B .

В самом деле, пусть, например, $A < B$, и пусть $A < C < B$. Тогда функция $f(x) - C$ непрерывна на $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Следовательно, существует точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) - C = 0$, т.е. $f(c) = C$.

Теорема (Вейерштрасса об ограниченности непрерывной на отрезке функции). Непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений.

* **Доказательство.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, но не является ограниченной на этом отрезке. Обозначим $I_1 = [a_1, b_1] = [a, b]$. Разделим отрезок I_1 пополам и обозначим через $I_2 = [a_2, b_2]$ тот из получившихся отрезков $\left[a_1, \frac{a_1 + b_1}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_1 + b_1}{2}, b_1\right]$, на котором функция $f(x)$ неограничена. Тогда $I_2 \subset I_1$, и длина отрезка I_2 равна $\frac{b - a}{2}$. Пусть уже построены отрезки $I_n \subset I_{n-1} \subset \dots \subset I_1$, причём на отрезке $I_k = [a_k, b_k]$ функция $f(x)$ неограничена, и длина этого отрезка равна $\frac{b - a}{2^{k-1}}$, $k = 1, \dots, n$. Разделим отрезок I_n пополам и обозначим $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ тот из получившихся отрезков $\left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n\right]$, на котором функция $f(x)$ неограничена. Тогда $I_{n+1} \subset I_n$, длина I_{n+1} равна $\frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b - a}{2^n}$, и построение отрезков по индукции может быть продолжено. По принципу вложенных отрезков существует точка c , принадлежащая всем построенным отрезкам, в частности $c \in [a_1, b_1] = [a, b]$. В точке c функция $f(x)$ непрерывна, и, следовательно, имеет предел (равный $f(c)$) при $x \rightarrow c$. По теореме о локальной ограниченности функции, имеющей конечный предел, $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности $(c - \delta, c + \delta) \cap [a, b]$, $\delta > 0$, этой точки (окрестность может получиться и односторонней, если точка c совпадет с одной из граничных точек отрезка $[a, b]$). С другой стороны, при достаточно большом n выполняется неравенство $\frac{b - a}{2^n} < \delta$, и отрезок I_n должен целиком лежать в указанной окрестности, т.к. этот отрезок содержит точку c . Поскольку по построению функция $f(x)$ неограничена на отрезке I_n , то мы получаем противоречие. Итак, ограниченность функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ доказана. Поскольку множество значений функции $f(x)$ на указанном отрезке не пусто и ограничено, то существует точная верхняя грань $M = \sup_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$ множества значений функции $f(x)$ на этом отрезке. Если $f(x) < M$ для всех $x \in [a, b]$, то функция $M - f(x)$ непрерывна и

положительна на $[a, b]$, а тогда $g(x) = 1/(M - f(x))$ непрерывна на этом отрезке и по доказанному ограничена на нём. С другой стороны для любого $\varepsilon > 0$ существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что $f(\xi) > M - \varepsilon$, т.е. $\varepsilon > M - f(\xi) > 0$, и $g(\xi) = \frac{1}{M - f(\xi)} > \frac{1}{\varepsilon}$. Это противоречит ограниченности функции $g(x)$ на $[a, b]$. Полученное противоречие доказывает существование на отрезке $[a, b]$ точки c такой, что $f(c) = M$. Ясно, что при этом M будет максимальным значением функции $f(x)$ на $[a, b]$. Аналогично можно доказать, что минимальное значение функции $f(x)$ на рассматриваемом отрезке также достигается в некоторой его точке. **Теорема доказана.** *

Заметим, что для промежутков, не являющихся отрезками, утверждения теоремы могут и не выполняться. Например, функция $f(x) = 1/x$ непрерывна, но неограничена на интервале $(0, 1)$. Далее, функция $f(x) = x$ непрерывна на $(0, 1)$, но не имеет на этом интервале максимального и минимального значений.

Теорема (о непрерывности обратной функции). Пусть функция $f(x)$ определена, непрерывна и возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда на отрезке $[f(a), f(b)]$ определена обратная функция $f^{-1}(y)$, которая непрерывна и возрастает на этом отрезке.

* **Доказательство.** Пусть $y \in [f(a), f(b)]$. По теореме о промежуточном значении существует число $x \in [a, b]$ такое, что $y = f(x)$. Это число единственно, т.к. если $x' \neq x$, то $x' > x$ или $x' < x$, и, соответственно, $f(x') > f(x) = y$ или $f(x') < f(x) = y$. Итак, каждому y из отрезка $[f(a), f(b)]$ можно поставить в соответствие число $x \in [a, b]$, являющееся единственным решением уравнения $y = f(x)$. Мы видим, что обратная функция $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ действительно существует. Эта функция возрастает. В самом деле, пусть $f(a) \leq y_1 < y_2 \leq f(b)$. Тогда если $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, то $f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2))$, т.е. $y_1 = y_2$, что невозможно. Если же $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, то в силу возрастания функции $f(x)$ получаем отсюда $f(f^{-1}(y_1)) > f(f^{-1}(y_2))$, т.е. $y_1 > y_2$ – противоречие. Остается признать, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, и функция $f^{-1}(y)$ возрастает на $[f(a), f(b)]$. Докажем, что $f^{-1}(y)$ непрерывна в произвольной точке y_0 этого отрезка. Пусть $f^{-1}(y_0) = x_0$, и пусть задано $\varepsilon > 0$. Для определённости точки x_0 и y_0 будем считать внутренними точками соответствующих отрезков; число ε можно считать столь малым, что $a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b$. Т.к. функция $f(x)$ возрастает, то $f(a) < f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon) < f(b)$. Пусть $\delta = \min(y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0)$. Ясно, что $\delta > 0$. Тогда, если $|y - y_0| < \delta$, то по определению δ имеем $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$. Т.к. функция $f^{-1}(y)$ возрастает, то $f^{-1}(f(x_0 - \varepsilon)) < f^{-1}(y) < f^{-1}(f(x_0 + \varepsilon))$, т.е. $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$, и $|f^{-1}(y) - x_0| = |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$, и непрерывность функции $f^{-1}(y)$ в точке y_0 доказана. Аналогично можно доказать непрерывность (одностороннюю) этой функции и в граничных точках $f(a)$ и $f(b)$. **Теорема доказана.** *

Можно сформулировать и доказать другие варианты этой теоремы. Возрастающую функцию $f(x)$ можно заменить убывающей. Отрезки $[a, b]$ и $[f(a), f(b)]$ можно заменить интервалами (a, b) и $(f(a + 0), f(b - 0))$, где $f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, $f(b - 0) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$, причем последние пределы могут быть и бесконечными.

В качестве приложения доказанной теоремы рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Все требования теоремы о непрерывности обратной функции выполнены. Поэтому функция $x = \arcsin y$ непрерывна и возрастает на отрезке $[-1, 1]$.

Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0$. Прямая $y = a$ называется правой **горизонтальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$. По теореме о связи функции, её предела и бесконечно малой мы можем написать $f(x) = a + o(1)$, где $o(1)$ — бесконечно малая функция при $x \rightarrow +\infty$. И здесь расстояние $|a - f(x)|$ от точки $M(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$ до асимптоты стремится к нулю, если точка M вдоль графика стремится в бесконечность (т.е. если $x \rightarrow +\infty$). Аналогично определяется

и левая горизонтальная асимптота в случае функции, определённой при $x < x_0$ (т.е. в окрестности точки $-\infty$).

Пример. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет горизонтальные асимптоты $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = -\frac{\pi}{2}$ соответственно при $x \rightarrow +\infty$ и $x \rightarrow -\infty$. Горизонтальные асимптоты имеют также графики функций $y = a^x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \operatorname{arcsctg} x$, $y = \operatorname{th} x$, $y = \operatorname{cth} x$ и др.

Пусть снова функция $f(x)$ определена при $x > x_0$, и пусть $f(x) = Ax + B + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$. Тогда прямая $y = Ax + B$ называется (правой) наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$. И здесь расстояние от точки $M(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$ до асимптоты стремится к нулю, если M стремится в бесконечность вдоль графика рассматриваемой функции (т.е. при $x \rightarrow +\infty$). Это следует из того, что указанное расстояние не превосходит модуля разности соответствующих ординат, т.е. величины $|f(x) - Ax - B|$, которая бесконечно мала при $x \rightarrow +\infty$ по определению асимптоты. Аналогично определяется и левая наклонная асимптота для функции, заданной при $x < x_0$. Очевидно также, что горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной.

Теорема (о необходимых и достаточных условиях наличия наклонной асимптоты).

Пусть функция $f(x)$ определена при $x > x_0$. Прямая $y = Ax + B$ тогда и только является правой асимптотой графика данной функции, когда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A \quad \text{и} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - Ax) = B.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $y = Ax + B$ — правая наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Тогда по определению $f(x) = Ax + B + o(1)$, $x \rightarrow +\infty$. Отсюда $\frac{f(x)}{x} = A + \frac{B}{x} + \frac{o(1)}{x} \rightarrow A$, $f(x) - Ax = B + o(1) \rightarrow B$, если $x \rightarrow +\infty$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если $f(x) - Ax \rightarrow B$ при $x \rightarrow +\infty$, то $f(x) - Ax = B + o(1)$, $x \rightarrow +\infty$. Поэтому прямая $y = Ax + B$ есть (правая) наклонная асимптота графика функции $y = f(x)$. Предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = A$ здесь не понадобился. Достаточность доказана.

Теорема доказана.

Пример. Найдём с помощью доказанной теоремы асимптоты графика функ-

$$\text{ции } y = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 1}. \quad \text{Имеем } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2}{x(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3 - x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1.$$

В данном случае прямая $y = x + 1$ является двусторонней наклонной асимптотой.

Найти точки разрыва функции, исследовать их характер, в случае устранимого разрыва доопределить функцию «по непрерывности»:

$$1.387. f(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}. \quad 1.388. f(x) = \frac{|3x-5|}{3x-5}.$$

$$1.389. f(x) = \frac{(1+x)^n - 1}{x}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad 1.390. f(x) = \frac{1}{x} \sin x.$$

$$1.391. f(x) = 1 - x \sin \frac{1}{x}. \quad 1.392. f(x) = 3^{\frac{x}{4-x^2}}.$$

$$1.393. f(x) = (x+1) \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \quad 1.394. f(x) = \frac{|x+2|}{\operatorname{arctg}(x+2)}.$$

$$1.395. f(x) = \frac{\frac{1}{3^{x-2}} - 1}{\frac{1}{3^{x-2}} + 1}. \quad 1.396. f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

$$1.397. f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{1} - \frac{1}{1}}. \quad 1.398. f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$